IX *Южный математический турнир • 2014 год*
Лига «Юниор» • 24 сентября

Третий тур.

1. *Лазерная* ладья бьет все клетки своей вертикали и горизонтали, даже через другие фигуры. Какое наибольшее количество лазерных ладей, каждая из которых бьет ровно 4 другие, может стоять на доске 99×99?

2. Сколькими способами из полного комплекта домино можно выкинуть три доминошки так, чтобы остальные можно было по правилам выложить в кольцо?

3. Выпуклый $3n$-угольник разбит на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри многоугольника. Докажите, что можно выбрать хотя бы n вершин, которые попарно не соединены между собой ни сторонами, ни диагоналями разбиения.

4. Целые числа a и b таковы, что a^3+b^3+ab делится на $ab(a+b)$. Найдите все такие пары a и b.

5. A_1, B_1, C_1 — точки на отрезках BC, CA и AB соответственно, в которых вписанная окружность касается сторон треугольника ABC, а A_2, B_2, C_2 — точки, в которых тех же сторон (в том же порядке) касаются вневписанные окружности. Докажите, что

$$AA_1+BB_1+CC_1+2\max(AB,BC,CA) \geqslant AA_2+BB_2+CC_2+2\min(AB,BC,CA).$$

6. Пусть $p(n)$ — произведение всех ненулевых цифр числа n. Докажите, что сумма $p(1)+p(2)+\ldots+p(10^8)$ делится на квадрат некоторого нечетного простого числа.

7. В ряд выписано 100 единиц, 100 двоек и 100 троек, причем никакие три одинаковые цифры не стоят подряд. Докажите, что можно выбрать 4 стоящие подряд цифры, среди которых есть и единица, и двойка, и тройка.

8. Пусть AD — биссектриса остроугольного треугольника ABC. Точка M на луче AB выбрана так, что $\angle MDA = \angle ABC$, а точка N на луче AC — так, что $\angle NDA = \angle ACB$. Обозначим через P точку пересечения прямых MN и AD. Докажите, что $AD^3 = AP \cdot AB \cdot AC$.

IX *Южный математический турнир • 2014 год*
Лига «Юниор» • 24 сентября

Третий тур.

1. *Лазерная* ладья бьет все клетки своей вертикали и горизонтали, даже через другие фигуры. Какое наибольшее количество лазерных ладей, каждая из которых бьет ровно 4 другие, может стоять на доске 99×99?

2. Сколькими способами из полного комплекта домино можно выкинуть три доминошки так, чтобы остальные можно было по правилам выложить в кольцо?

3. Выпуклый $3n$-угольник разбит на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри многоугольника. Докажите, что можно выбрать хотя бы n вершин, которые попарно не соединены между собой ни сторонами, ни диагоналями разбиения.

4. Целые числа a и b таковы, что a^3+b^3+ab делится на $ab(a+b)$. Найдите все такие пары a и b.

5. A_1, B_1, C_1 — точки на отрезках BC, CA и AB соответственно, в которых вписанная окружность касается сторон треугольника ABC, а A_2, B_2, C_2 — точки, в которых тех же сторон (в том же порядке) касаются вневписанные окружности. Докажите, что

$$AA_1+BB_1+CC_1+2\max(AB,BC,CA) \geqslant AA_2+BB_2+CC_2+2\min(AB,BC,CA).$$

6. Пусть $p(n)$ — произведение всех ненулевых цифр числа n. Докажите, что сумма $p(1)+p(2)+\ldots+p(10^8)$ делится на квадрат некоторого нечетного простого числа.

7. В ряд выписано 100 единиц, 100 двоек и 100 троек, причем никакие три одинаковые цифры не стоят подряд. Докажите, что можно выбрать 4 стоящие подряд цифры, среди которых есть и единица, и двойка, и тройка.

8. Пусть AD — биссектриса остроугольного треугольника ABC. Точка M на луче AB выбрана так, что $\angle MDA = \angle ABC$, а точка N на луче AC — так, что $\angle NDA = \angle ACB$. Обозначим через P точку пересечения прямых MN и AD. Докажите, что $AD^3 = AP \cdot AB \cdot AC$.