Старт-лига. 3 тур.

1. В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC выбраны точки D и E, а на катете BC – точки F и G так, что $\angle ABD=\angle DBE=\angle CBE$, $\angle BAF=\angle FAG=\angle GAC$. Отрезки AF и BD пересекаются в точке K. Докажите, что треугольник EGK – равносторонний.

2. На доске выписаны несколько уравнений вида $Ax+By=C$, где все коэффициенты A, B, C – не нулевые. Скажем, что два уравнения *дружат*, если у системы из этих двух уравнений – конечное число решений (возможно, что и ноль решений). Известно, что каждое уравнение *дружит* ровно со 111 другими уравнениями. Сколько всего уравнений может быть выписано на доске?

3. Петя разрезал на две части квадрат со стороной 2 дм. Докажите, что он не сможет накрыть ими равносторонний треугольник со стороной 3 дм.

4. Пункты ***А*** и ***Б*** соединены несколькими непересекающимися дорогами. На каждой дороге стоит одна или несколько машин. Все машины одинаковы, и общее количество бензина в машинах достаточно, чтобы проехать расстояние, не меньшее суммы длин дорог. Обязательно ли одна из машин может доехать до всех остальных машин, собирая у них бензин, и вернуться в исходную точку, ни разу не развернувшись на 180°?

5. Целые числа p, q, r таковы, что $p + 2q + 3r$ делится на 11. Докажите, что и $5p - q + 4r$ делится на 11.

6. По кругу лежит 17 одинаковых на вид монет, из которых две лежащие рядом – фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, обе фальшивые монеты весят одинаково и при этом легче настоящих на 1 грамм. Имеются ***нежные весы***: это чашечные весы, которые ломаются, если разность весов на чашах больше 1 грамма; при этом, однако, весы показывают, какая чаша перевесила. Как за два взвешивания на нежных весах без гирь найти обе фальшивые монеты?

7. Сколькими способами можно из полного комплекта домино выкинуть две доминошки так, чтобы остальные можно было по правилам выложить в кольцо? (В полный комплект домино входят 28 доминошек с парами 0-0, 0-1, …, 6-6)

8. Рассматриваются всевозможные дроби вида

$$k+\frac{1}{m+\frac{1}{n}}\ ,$$

где k, m, n – различные ненулевые цифры. Какая наименьшая положительная разность может быть между двумя такими дробями?