Девятый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–26.09.2014

Гранд-лига, бои за 5 и 7 места. 25.09.2014

1. В стране 100 городов; некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами. Всего есть 2014 авиарейсов; при этом существуют такие два города, что от одного к другому нельзя добраться одним или двумя рейсами. Рейсы распределены между n авиакомпаниями, у каждой авиакомпании есть хотя бы один рейс. При этом для любых двух городов существует авиакомпания, рейсами которой можно от первого города добраться до второго (возможно, с пересадками). При каком наибольшем n это возможно?

2. Пусть k, m, n — натуральные числа такие, что $k \leqslant n$. Докажите, что

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{kC_m^r C_n^k}{(r+k)C_{m+n}^{r+k}} = 1.$$

3. Пусть O — центр описанной окружности Ω остроугольного треугольника ABC. Окружность ω с центром O касается стороны BC. Точки X и Y на стороне BC выбраны так, что AX и AY касаются ω, причём точки X и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой AO. Касательная к Ω в точке B пересекает прямую, проходящую через X параллельно AC, в точке T. Касательная к Ω в точке C пересекает прямую, проходящую через Y параллельно AB, в точке S. Докажите, что прямая ST касается Ω.

4. Для каждого нечётного простого p рассмотрим арифметическую прогрессию с разностью p и первым членом $\frac{p-1}{2}$. Докажите, что каждое натуральное число лежит хотя бы в одной из этих прогрессий.

5. Точки O и T – центры описанной окружности и окружности девяти точек остроугольного треугольника ABC соответственно. Прямая AT пересекает сторону BC в точке P. Описанные окружности треугольников APB и APC пересекают стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Отрезки BE и CF пересекаются в точке S. Докажите, что точки P, O, S лежат на одной прямой.

6. Найдите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами такие, что числа $f(n)$ и $f(2^n)$ взаимно просты при каждом натуральном n.

7. Какое наибольшее количество нулей может быть в десятичной записи числа $\left[\frac{m}{n}\right]$, где m — 100-значное число, в записи которого нет нулей, а n — натуральное число, не превосходящее m?

8. При каких n существует клетчатый многоугольник, который можно разрезать на доминошки ровно n способами?

9. Для положительных чисел x, y, z, сумма которых равна 1, докажите неравенство

$$\frac{xy}{z+xy} + \frac{yz}{x+yz} + \frac{zx}{y+zx} \leqslant 1.$$

10. В последовательности нулей и единиц разрешается заменять 1 на 010 или, наоборот, 010 на 1, а также 0 на 110 или, наоборот, 110 на 0. Можно ли с помощью таких операций получить из последовательности $00\ldots001$ (2014 нулей) последовательность $100\ldots00$ (2014 нулей)?