Девятый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–26.09.2014

Гранд-лига, полуфинал. 25.09.2014

1. В стране 100 городов; некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами. Всего есть 2014 авиарейсов; при этом существуют такие два города, что от одного к другому нельзя добраться одним или двумя рейсами. Рейсы распределены между n авиакомпаниями, у каждой авиакомпании есть хотя бы один рейс. При этом для любых двух городов существует авиакомпания, рейсами которой можно от первого города добраться до второго (возможно, с пересадками). При каком наибольшем n это возможно?

2. Для перестановки σ чисел $1, 2, \ldots, n$ обозначим через $I(\sigma)$ множество всех индексов i таких, что $\sigma(i) \leqslant i$. Найдите (в замкнутой форме) значение выражения

$$\sum_{\sigma} \frac{1}{|I(\sigma)|} \sum_{i \in I(\sigma)} \big(i + \sigma(i)\big),$$

где сумма берётся по всем перестановкам элементов $1, 2, \ldots, n$.

3. Пусть O — центр описанной окружности Ω остроугольного треугольника ABC. Окружность ω с центром O касается стороны BC. Точки X и Y на стороне BC выбраны так, что AX и AY касаются ω, причём точки X и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой AO. Касательная к Ω в точке B пересекает прямую, проходящую через X параллельно AC, в точке T. Касательная к Ω в точке C пересекает прямую, проходящую через Y параллельно AB, в точке S. Докажите, что прямая ST касается Ω.

4. Для каждого нечётного простого p рассмотрим арифметическую прогрессию с разностью p и первым членом $\frac{p-1}{2}$. Докажите, что каждое натуральное число лежит хотя бы в одной из этих прогрессий.

5. Вписанная окружность с центром I касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A', B', C' соответственно. Точки A'', B'', C'' — середины отрезков AI, BI, CI соответственно. Докажите, что прямые $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ пересекаются в точке, лежащей на окружности девяти точек треугольника ABC.

6. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(n+2) = f\big(n + 2 - f(n+1)\big) + f\big(n + 1 - f(n)\big) \quad \text{при } n \geqslant 1.$$

Найдите все n, для которых $f(n) = 2^{20} + 1$.

7. Какое наибольшее количество нулей может быть в десятичной записи числа $\left[\frac{m}{n}\right]$, где m — 1000-значное число, в записи которого нет нулей, а n — натуральное число, не превосходящее m?

8. При каких n существует клетчатый многоугольник, который можно разрезать на доминошки ровно n способами?

9. Найдите наибольшее возможное натуральное m для которого выполнено следующее условие:

Существуют $2m$ (не обязательно различных) натуральных чисел i_1, i_2, $\ldots$, i_m, j_1, j_2, $\ldots$, j_m, каждое из которых не превосходит 1000, такие, что

$$a_{i_1}a_{j_1} + a_{i_2}a_{j_2} + \ldots + a_{i_m}a_{j_m} \leqslant \frac{1}{2{,}014}$$

для любых неотрицательных a_1, a_2, $\ldots$, a_{1000}, сумма которых равна 1.

10. В последовательности нулей и единиц разрешается заменять 1 на 010 или, наоборот, 010 на 1, а также 0 на 110 или, наоборот, 110 на 0. Можно ли с помощью таких операций получить из последовательности 00…001 (2014 нулей) последовательность 100…00 (2014 нулей)?