IX *Южный математический турнир • 2014 год*
Лига «Юниор» • 25 сентября

Полуфинал.

1. Для каждого нечетного простого p рассматривается арифметическая прогрессия с разностью p и первым членом $\frac{p-1}{2}$. Докажите, что каждое натуральное число лежит хотя бы в одной из этих прогрессий.

2. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна сторонам BC и AD. На стороне AD выбрана такая точка K, что $AB = BK$. Точка C_1 симметрична C относительно K, а точка D_1 симметрична D относительно A. Докажите, что $BC_1 = BD_1$.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, где $n \geqslant 2$. Найдите максимальное возможное значение суммы

$$S(n) = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \ldots + |a_n - a_{n-1}|.$$

4. В турнире по футболу участвовали 30 команд. Было сыграно 29 матчей. Игра каждой команды оценивалась натуральным числом по 10-балльной шкале. Докажите, что можно так выставить оценки всем командам, чтобы была выставлена хотя бы одна десятка и в каждой паре игравших команд сумма оценок равнялась 18.

5. Пусть $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ — положительные вещественные числа. Докажите неравенство

$$x_0 + \frac{x_0}{(x_0 - x_1)^2} + \frac{x_1}{(x_1 - x_2)^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_n)^2} \geqslant \frac{x_1}{(x_1 - x_0)^2} + \ldots + \frac{x_n}{(x_n - x_{n-1})^2} + x_n + 2n.$$

6. Шахматная доска 8×8 разрезана по границам клеток на 10 прямоугольников. Докажите, что среди них найдутся два прямоугольника одинакового периметра.

7. Семья рыбаков — отец и 3 сына — хочет переправить боевую группу из 10 бойцов на Тайный остров архипелага в тылу врага. У них есть двухместная лодка. Не запомнив дороги, без проводника до Тайного острова не проплыть. Вначале дорогу до Тайного острова знает только рыбак-отец. Но всех проводить он не сможет: путь лежит мимо Сторожевой башни, и каждый из них может пройти мимо нее не более 5 раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу. Рыбак запоминает дорогу, если проплывает по ней один раз, а бойцу для этого надо проплыть туда и обратно. В конце все рыбаки должны быть дома, все бойцы — на острове, лодка — где придется. Как организовать переправу?

8. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник площади 8. Внутри него нашлась такая точка K, что $KA + KB + KC + KD = 8$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.