Девятый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–26.09.2014

Гранд-лига, финал. 26.09.2014

1. Дано простое число $p > 3$. Натуральное число n таково, что n^2+n+1 делится на p. Докажите, что $(n+1)^p - n^p - 1$ делится на p^3.

2. Боковые грани пирамиды $SABCD$ касаются сферы ω, грань $ABCD$ пересекает эту сферу, а центр ω лежит внутри пирамиды. Докажите, что существует точка $S' \neq S$ такая, что боковые грани пирамиды $S'ABCD$ также касаются ω.

3. Пусть p — простое число, дающее остаток 1 при делении на 4, а множество $A \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ таково, что для любых $a, b \in A$ существует целое t такое, что $a - b - t^2$ делится на p. Докажите, что $|A| < \sqrt{p}$.

4. Каждой паре натуральных чисел $i, j \leqslant 143$ сопоставляется натуральное число $i \diamond j \leqslant 143$. Определяемая операция должна удовлетворять условиям

$$i \diamond i = i, \quad (i \diamond j) \diamond (k \diamond \ell) = i \diamond \ell$$

при всех натуральных $i, j, k, \ell \leqslant 143$. Найдите количество таких операций.

5. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$ докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geqslant \frac{a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_1}{a_n+a_1}.$$

6. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 4$ и $a_{n+1} = a_n^2 - a_n$. Конечно или бесконечно множество простых чисел, не делящих ни один из членов этой последовательности?

7. Точка P внутри треугольника ABC такова, что $\angle PAC = \angle PCB$. Пусть D — середина CP, и пусть AP пересекает BC в точке X. Наконец, прямая XD пересекает луч BP в точке Y. Докажите, что $\angle BAX + \angle BCY = 180^\circ$.

8. Рассмотрим 10 000 различных конечных множеств $F_1, F_2, \ldots, F_{10\,000}$. Конечное множество A назовём *осколочным*, если для любого подмножества $X \subseteq A$ найдётся такое множество F_i, что $A \cap F_i = X$. Докажите, что существует не менее 10 000 осколочных множеств.

9. Есть 100 неокрашенных кубиков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно выбрать одну неокрашенную грань любого кубика и окрасить её в черный или белый цвет. Игра заканчивается, когда все кубики полностью окрашены. Вася получает от Пети столько рублей, сколько сможет выбрать по-разному окрашенных кубиков. Какое наибольшее число рублей он может наверняка получить, как бы ни играл Петя?

10. Для непрерывной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и целого $k \geqslant 0$ определим

$$f^{+k}(x) = x + f(x) + f(f(x)) + \ldots + \underbrace{f(f \ldots f(}_{k \text{ знаков } f}x) \ldots).$$

Найдите все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что функция f^{+1} — монотонно неубывающая, а при некотором натуральном k функция f^{+k} — монотонно невозрастающая.