IX *Южный математический турнир • 2014 год*
Лига «Юниор» • 26 сентября

Финальный тур.

1. Для положительных a и b таких, что $ab \geqslant 1$, докажите неравенство

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16.$$

2. Есть 100 неокрашенных кубиков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно выбрать одну непокрашенную грань любого кубика и покрасить ее в черный или белый цвет. Игра заканчивается, когда все кубики полностью покрашены. Вася получает от Пети столько рублей, сколько сможет выбрать по-разному окрашенных кубиков (кубики считаются одинаково раскрашенными, если их можно совместить вращением). Какое наибольшее число рублей Вася может наверняка получить, как бы ни играл Петя?

3. Назовем *полосой* ширины w множество всех точек между двумя параллельными прямыми на расстоянии w, включая сами прямые. На плоскости дано конечное множество точек, любые три из которых можно покрыть полосой ширины 1. Докажите, что это множество можно покрыть полосой ширины 2.

4. Найдите все положительные десятичные дроби (как конечные, так и бесконечные, возможно, непериодические), которые при вычеркивании первой цифры после запятой увеличиваются ровно в 3 раза.

5. Дан треугольник ABC с тупым углом B. На стороне AC взяты различные точки D и E такие, что $AB^2+CB^2 = AD^2+CD^2 = AE^2+CE^2$. Найдите угол DBE.

6. Докажите, что всякое натуральное число, не меньшее 1000, можно представить как сумму трех составных слагаемых так, чтобы сумма любой пары слагаемых тоже была составным числом.

7. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник без параллельных сторон. Его диагонали пересекаются в точке E. Обозначим за F и G середины AB и CD соответственно, а за ℓ — прямую через G, параллельную AB. Проведем из точки E перпендикуляры EH на ℓ и EK на CD. Докажите, что прямые EF и HK перпендикулярны.

8. По кругу сидят 25 учащихся, у них всего 65 гаджетов. У каждого мальчика ровно на 1 гаджет больше, чем у его соседа или соседки *справа*. Каково наибольшее возможное количество мальчиков в этом круге?