Девятый «Южный математический турнир»
ВДЦ «Орленок» 26 сентября 2014

Старт-лига. ФИНАЛ.

1. В стране 111 городов. Некоторые пары городов соединены одной или несколькими дорогами, не проходящими через другие города. Известно, что из любого города можно проехать в любой другой. Однако, при закрытии на ремонт дорог любого кольцевого маршрута это свойство нарушается. Какое наибольшее число дорог может быть в стране?

2. У барона Мюнхгаузена есть два картонных четырёхугольника. Он утверждает, что накладывая их друг на друга, может получить в пересечении и правильный треугольник, и квадрат, и правильный пятиугольник. Могут ли слова барона быть правдой?

3. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB и катете AC выбраны точки L и K соответственно так, что $KL=2CK$ и $\angle BKL$ – прямой. Найдите $\angle BKC$, если известно, что $\angle BAC=15°$.

4. По кругу сидят 25 учащихся, у которых всего 65 гаджетов. У каждого мальчика на 1 гаджет больше, чем у его соседа (соседки) справа. Каково наибольшее возможное число мальчиков в этом круге?

5. Есть 50 неокрашенных кубиков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно выбрать одну непокрашенную грань любого кубика и покрасить её в черный или белый цвет. Игра заканчивается, когда все кубики полностью покрашены. Вася получает от Пети столько рублей, сколько сможет выбрать по-разному окрашенных кубиков. Какое наибольшее число рублей он может наверняка получить, как бы ни играл Петя?

6. Целые числа x, y, z таковы, что $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что число $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ является полным квадратом.

7. Найдите все десятичные дроби, которые при вычеркивании первой цифры после запятой увеличиваются ровно в 3 раза.

8. Натуральное число $n \geq 30$. Докажите, что n можно представить как сумму трех составных натуральных слагаемых так, чтобы сумма любой пары слагаемых тоже была составным числом.