Командная олимпиада.

1. На острове живут два клана — Рыцари и Лжецы (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). 2014 жителей острова выстроились в круг. Каждый сказал: «Мои соседи из одного клана». Сколько лжецов могло быть в кругу? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

2. Даны два треугольника. Каждый угол первого треугольника равен разности каких-то двух углов второго. Докажите, что первый треугольник — равнобедренный или прямоугольный.

3. Для положительных x, y докажите неравенство

$$\frac{x^2+y^2+xy}{3} \leqslant \frac{x+y}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

4. Может ли сумма двух степеней тройки, увеличенная на единицу, быть квадратом натурального числа?

5. Пусть D — множество всех натуральных делителей числа $10!$ ($n!$ есть произведение всех натуральных чисел от 1 до n). Обозначим за M множество, составленное из чисел, получаемых увеличением всех чисел из D на $\sqrt{10!}$. Найдите сумму обратных величин к числам множества M.

6. Тридцать школьников занумерованы числами от 1 до 30. Каждый из них сказал: «Каждый, чей номер взаимно прост с моим, иногда лжет». Какое наибольшее количество школьников, всегда говорящих правду, может быть среди этих тридцати?

7. В остроугольном неправильном треугольнике ABC обозначим за H точку пересечения высот, за O — центр описанной окружности, за P — основание высоты из C на AB. Пусть D — точка пересечения CO со стороной AB, а E — середина CD. Докажите, что PE проходит через середину HO.

8. На всех клетках шахматной доски 8×8 лежит по алмазу. Известно, что в каждой паре клеток с общей стороной веса двух алмазов различны. Докажите, что алмазы можно выложить на доску так, чтобы в каждой паре клеток, связанных ходом коня, веса двух алмазов были различны.