X Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VII Турнир математических игр.

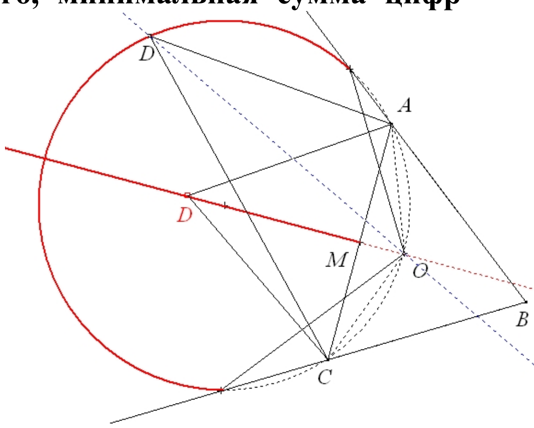
Математическая игра «Пенальти». ***<u>Старшая лига (10-11 классы).</u>*** **<u>Решения</u>. *10 сентября 2014 года***

1. Множество *T* рациональных чисел называется *полным*, если для каждой дроби $\in T$ дроби и тоже содержатся в *T*. Найдите все такие рациональные числа *r* $(0 < r < 1)$, что любое полное множество, содержащее число *r*, содержит все рациональные числа между 0 и 1. **(<u>*r* = 1/2.</u> Если $r \neq 1/2$, то множество чисел, которое можно получить из *r* несколькими указанными операциями, будет полным. Но оно не содержит 1/2, так как каждая операция увеличивает сумму числителя и знаменателя и сохраняет их взаимную простоту. Осталось доказать, что любое полное множество, содержащее 1/2, будет содержать все рациональные числа в указанном интервале. Вместо этого покажем, что из любой дроби “обратным ходом” можно получить 1/2. Обратный ход заключается в том, что из правильной дроби получается дробь, числитель которой равен меньшему из чисел *p* и $q-p$, а знаменатель – большему из этих чисел. Поскольку дробь можно считать несократимой, то это действие приводит снова к несократимой правильной дроби (за исключением случая самой дроби 1/2). При этом сумма числителя и знаменателя уменьшается. Поэтому в конце концов процесс закончится, т.е. мы придём к 1/2.)**

2. Продавец ювелирного магазина решил убедиться, что 20 бриллиантов, расположенных на витрине в ряд и весящих 80, 81, . . . , 99 каратов, действительно расположены в порядке возрастания весов. Каким наименьшим числом взвешиваний на электронных весах, выдерживающих не более 200 каратов, он может это сделать? **(<u>13 взвешиваний</u>. За один раз на весах можно взвесить не более двух бриллиантов. Рассмотрим граф, в котором вершины – бриллианты, ребро – взвешивание (либо ребро–петля, если на весах был один бриллиант, либо обычное ребро, если на весах были два бриллианта.) В графе не может быть более одной изолированной вершины, иначе невозможно распознать монеты, не участвовавшие во взвешиваниях. Кроме того, не может быть компоненты связности из двух вершин с одним ребром (или несколькими кратными рёбрами – это лишние взвешивания). В каждой компоненте связности (кроме изолированной вершины и дерева) рёбер будет не меньше, чем вершин. Таким образом, уменьшить количество рёбер можно только за счёт изолированной вершины и деревьев, в которых не менее трёх вершин (таких деревьев не более [19:3]=6). Значит, у нас не менее 20–1–6=13 рёбер-взвешиваний. Приведём пример на 13 взвешиваний. Сначала по два взвешивания на каждую из шести троек бриллиантов (80-81, 81-82), (83-84, 84-85), …, (95-96, 96-97), затем узнаем 98 и автоматически остаётся бриллиант на 99 карат.)**

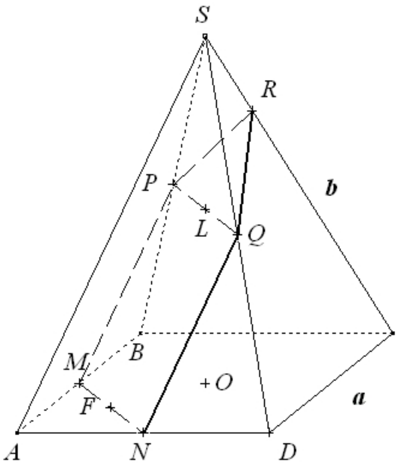
3. Найдите наименьшее натуральное число *n* такое, что и сумма цифр числа *n*, и сумма цифр числа *n*+1 делится на 2014. **(**$7\underbrace{99\ldots9}_{222}8\underbrace{99\ldots9}_{1119}$**. Если *n* оканчивается не на 9, то у следующего числа сумма цифр будет больше ровно на 1, значит, обе суммы цифр не смогут одновременно разделиться на 2014. Тогда наше число должно оканчиваться на 9. Пусть на конце у нашего числа будет ровно *k* девяток, тогда у следующего числа сумма цифр будет меньше на 9*k*–1, что должно делиться на 2014. Значит, $9k-1=2014a$, где *a* – натуральное число. Действуя по модулю 9, получим, что $-1\equiv-2a\equiv-10 \pmod 9$, т.е. $a\equiv5 \pmod 9$. На конце первого числа стоит $k=(2014a+1)/9$ девяток, тогда $k\geq(2014\cdot5+1)/9=1119$. Кроме того, минимальная сумма цифр второго числа, оканчивающегося на нули, равна 2014, значит, перед нулями в нём стоит хотя бы [2014:9]+1=224 цифры. Минимально возможное такое число равно $7\underbrace{99\ldots9}_{223}$.**

Таким образом, минимальное $n=7\underbrace{99\ldots9}_{222}8\underbrace{99\ldots9}_{1119}$.)



4. *O* – центр описанной окружности остроугольного треугольника *ABC*. Найдите геометрическое место точки *D* такой, что *ABCD* – выпуклый четырёхугольник, у которого биссектриса угла *D* проходит через точку *O*. **(Объединение внутренних точек дуги *AC* описанной окружности треугольника *AOC*, на которой не лежит точка *O* и ограниченной лучами *BA* и *BC* (без точек этих лучей), и точек луча *OM*, лежащих за точкой *M*, где *M* – середина отрезка *AC*.)**

5. Дана последовательность из 300 цифр: $\underbrace{11\ldots1}_{100}\underbrace{22\ldots2}_{100}\underbrace{33\ldots3}_{100}$. На какое наибольшее количество частей-чисел можно её разрезать так, чтобы все полученные при этом числа были различными? **(<u>41 число</u>. Если у нас есть число, содержащее и 1, и 2, и 3, то количество чисел можно будет увеличить, разрезав это длинное число где-то среди двоек. Тогда у нас возможны максимум два числа, содержащих в своей записи разные цифры (со стыком 12 и со стыком 23), а остальные числа-репдигиты содержат в себе только одинаковые цифры. При этом разных репдигитов из одинаковых цифр будет не более 13, т.к. если бы их было не менее 14, то для них понадобилось бы не менее 1+2+3+…+14=15·14/2=105 одинаковых цифр, что больше имеющихся 100, – противоречие. Значит, у нас не более чем по 13 чисел-репдигитов, состоящих только из 1, только из 2 и только из 3, а также ещё возможно два числа с различными цифрами, т.е. всего не более 3·13+2=41 числа. Приведём пример на 41 число: 1, 11, 111, …, $\underbrace{11\ldots1}_{13}$, $\underbrace{11\ldots1}_{9}\underbrace{22\ldots2}_{8}$, 2, 22, …, $\underbrace{22\ldots2}_{13}$, $2\underbrace{33\ldots3}_{9}$, 3, 33, 333, …, $\underbrace{33\ldots3}_{13}$.)**



6. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* через середины сторон основания *AB* и *AD* проведена плоскость, параллельная боковому ребру *SA* . Найдите площадь сечения, зная сторону основания *a* и боковое ребро *b*. **($\frac{5ab\sqrt{2}}{16}$. Пусть *M* и *N* – середины сторон *AB* и *AD* основания *ABCD* правильной четырёхугольной пирамиды *ABCD* , а *P*, *R* и *Q* – точки пересечения секущей плоскости с рёбрами *SB* , *SC* и *SD* соответственно. Плоскость боковой грани *ASB* проходит через прямую *SA* , параллельную секущей плоскости, и пересекает секущую плоскость по прямой *MP* . Значит, *MP* || *AS* . Аналогично, *NQ* || *AS* и *RF* || *AS* , где *F* – точка пересечения *AC* и *MN* . Пусть *SO* – высота пирамиды. Поскольку пирамида *ABCD* правильная, *O* – точка пересечения диагоналей квадрата *ABCD*. По теореме о трёх перпендикулярах $AS\perp BD$, а т.к. *MP* || *AS* и *MN* || *BD* , то $MP\perp MN$. Кроме того, *MP* и *NQ* – средние линии треугольников *ASB* и *ASD* , поэтому *MP* = *AS/*2 = *NQ* . Значит, четырёхугольник *MPQN* – прямоугольник. Пусть *L* – точка пересечения отрезков *FR* и *PQ* . Из подобия треугольников *CFR* и *CAS* находим, что $FR = AS\cdot CF/AC=\frac{3}{4}AS=\frac{3}{4}b$. Поэтому $LR = FR - LF = \frac{3}{4}b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}b$. Далее находим: $S_{MPRQN} = S_{MPQN} + S_{\Delta\ PRQ} = MN\cdot MP + \frac{1}{2}PQ\cdot LR = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{b}{4}=\frac{5ab\sqrt{2}}{16}$.)**

7. Натуральное число назовём *равномернорастущим*, если его цифры идут в неубывающем порядке и каждая цифра равна количеству различных цифр, не больших её и входящих в запись этого числа, например, числа 111 222 334 4 и 123 456 777 8. Сколько всего равномернорастущих десятизначных чисел? **(<u>511=2⁹–1</u>. Начнём выбирать цифру для числа, начиная со старшего разряда. Первая цифра однозначно 1, вторая – либо 1, либо 2 (два варианта выбора), каждая следующая цифра также выбирается двумя способами (либо прежняя цифра, либо большая её на единицу). Всего будет 2^9=512 вариантов выбора. Но один случай нам не даёт десятизначного числа – когда на каждом шаге была выбрана следующая цифра и получилась несуществующая цифра 10 на десятом шаге.)**

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
64	63	62	61	60	59	58	57

8. Поля шахматной доски занумерованы, как показано на рисунке. Рас… дру… *Фе*… **(Ра… пер…**

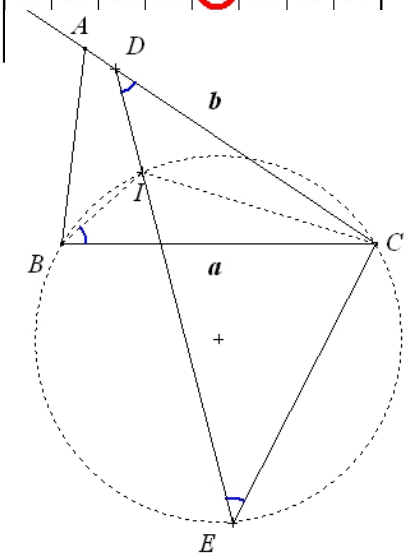
0	1	2	3	4	5	6	7	8
16	17	18	19	20	21	22	23	24
32	33	34	35	36	37	38	39	40
48	49	50	51	52	53	54	55	56
	1	2	3	4	5	6	7	8

16	15	14	13	12	11	10	9	8
32	31	30	29	28	27	26	25	24
48	47	46	45	44	43	42	41	40
64	63	62	61	60	59	58	57	56
8	7	6	5	4	3	2	1	

второй части – все чётные по номерам сверху строки. Тогда для каждой из частей можно ввести свою систему координат так, как показано на рисунке. В первой части строкам соответствуют числа 0, 16, 32 и 48, столбцам – все целые числа от 1 до 8 по возрастанию слева направо; во второй части строкам соответствуют числа 8, 24, 40, 56, столбцам – все целые числа от 8 до 1 по убыванию слева направо. Тогда в каждой клетке будет записано число, равное сумме её координат, введённых нами. В каждый прямоугольник можно поставить не более 4 ферзей, которые здесь фактически являются ладьями. Максимум суммы чисел клеток будет тогда, когда мы сможем поставить по 4 фигуры в каждый прямоугольник, захватив и все строки, и все столбцы с наибольшими координатами. Для этого в первой части ферзей надо ставить в правой зоне 4×4, а во второй части – в левой зоне 4×4, причём неважно в каком порядке, лишь бы их было по 4 штуки. Нам это удастся сделать, если воспользоваться знаменитой центрально-симметричной расстановкой 8 ферзей, не бьющих друг друга (см. рис.).)

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56

9. В компании 32 человека. Оказалось, что любых 30 из них можно разбить на 15 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании? (**<u>48</u>. У каждого в такой компании должно быть не меньше трёх знакомых: иначе, удалив двух человек, мы сможем «изолировать» одного из её членов. Поэтому всего пар знакомых в ней не меньше, чем $3\cdot32/2=48$. Пример, когда пар ровно 48, получается, если расставить людей по кругу через равные промежутки и каждого познакомить с двумя соседями и человеком, стоящим напротив. Если мы выбросим двух людей, стоящих напротив, то оставшихся можно разбить на 15 пар стоящих напротив. Пусть мы выбросим двоих, не стоящих напротив. Если на каждой из двух образованных ими дуг стоит по чётному числу людей, разобьём их на пары соседей. Если же на каждой – по нечётному числу людей, на меньшей дуге разобьём на пары всех, кроме одного из крайних, а крайнему в пару дадим противоположного. После этого, как несложно проверить, большая дуга распадётся на две из чётного числа людей, и мы сможем разбить каждую из них на пары соседей.)**



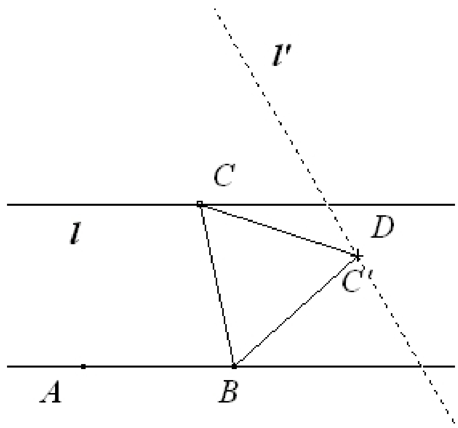
10. В неравнобедренном треугольнике ABC ($BC=a,\ CA=b$) точка I – центр вписанной окружности. На луче CA отмечена точка D такая, что $CD=CB$. Прямая DI вторично пересекается с описанной окружностью треугольника BIC в точке E. При каком значении стороны AB площадь треугольника BCE будет наибольшей? (**$\sqrt{|a^2-b^2|}$. Заметим, что биссектриса CI является осью симметрии угла C и $CD=CB$, значит, $\angle CDI=\angle CBI$, но $\angle CBI=\angle CEI$ как опирающиеся на одну дугу, следовательно, ΔCDE равнобедренный ($CD=CE$). Тогда в равнобедренном треугольнике BCE ($BC=CE=a$) наибольшая площадь будет при наибольшем синусе $\angle BCE$. Но $\angle BCE=\angle DCE-\angle DCB=(180°-2\angle CDE)-\angle DCB=180°-\angle ABC-\angle DCB=\angle BAC$. Значит, в случае $a>b$ получим $\angle BAC=90°$, что выполняется при условии $AB=\sqrt{a^2-b^2}$ в силу теоремы Пифагора. В случае $b>a$ $\angle BAC=\alpha$ всегда будет острым, значит, наибольшее значение его синуса будет при $\beta=\angle ABC=90°$, что следует из теоремы синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$ для треугольника ABC. Тогда $AB=\sqrt{b^2-a^2}$. Случай $a=b$ невозможен в силу неравнобедренности треугольника согласно условию.)**

11. Сумма положительных рациональных чисел $r_1, r_2,\ldots r_n$ равна 1. Найдите наибольшее возможное значение числа $k-([r_1k]+[r_2k]+\ldots+[r_nk])$ при натуральных k, где $[x]$– целая часть числа x. (**<u>$n-1$</u>. $k-([r_1k]+[r_2k]+\ldots+[r_nk])=k(r_1+r_2+\ldots+r_n)-([r_1k]+[r_2k]+\ldots+[r_nk])=\{r_1k\}+\{r_2k\}+\ldots+\{r_nk\}$. Последняя сумма, очевидно, меньше n. Каждое слагаемое её периодично (с периодом равным знаменателю соответствующей дроби r_j), поэтому и вся сумма периодична с**

некоторым целым периодом N. При $k = N - 1$ сумма принимает то же значение, что и при $k = -1$, т.е. равна $\{-r_1\} + \{-r_2\} + \ldots + \{-r_n\} = (1 - r_1) + (1 - r_2) + \ldots + (1 - r_n) = n - 1$.)

12. Известно, что $\mathrm{tg}\, x_1\, \mathrm{tg}\, x_2 \ldots \mathrm{tg}\, x_n = 1$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n$? **(. $\sin^2 x_1 \sin^2 x_2 \ldots \sin^2 x_n = 2^{-n} \sin 2x_1 \sin 2x_2 \ldots \sin 2x_n\, \mathrm{tg}\, x_1\, \mathrm{tg}\, x_2 \ldots \mathrm{tg}\, x_n = 2^{-n} \sin 2x_1 \sin 2x_2 \ldots \sin 2x_n \le 2^{-n}$. Поэтому $\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n \le$. Равенство достигается при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n =$.)**

13. A и B − фиксированные точки плоскости. Точка C движется по прямой l, удалённой от прямой AB на фиксированное расстояние. Точка D является третьей вершиной равностороннего треугольника BCD и располагается с точкой A в разных полуплоскостях относительно прямой BC. Найдите геометрическое место точки D. **(При повороте на 60° относительно точки B точка C перейдёт в точку C'=D, значит, геометрическим местом точки D будет прямая l', получающаяся при повороте прямой l относительно B на угол в 60° (см. рис.))**



14. На доске написана правильная несократимая дробь. Петя прибавил к её числителю единицу (сохранив знаменатель), а Вася вычел из её знаменателя числитель (сохранив числитель). Получились равные дроби. Какая дробь могла быть написана исходно? **(1/2. Пусть исходная дробь равна p/q. По условию $(p+1)/q = p/(q-p)$, откуда $(p+1)(q-p) = pq$. Из последнего равенства получаем $q = p^2+p$, откуда $p/q = p/(p^2+p) = 1/(p+1)$. Поскольку по условию исходная дробь несократима, то $p = 1$, откуда и получается ответ.)**

15. Натуральное число назовём *равномерноубывающим*, если его цифры идут в невозрастающем порядке и каждая цифра равна количеству различных цифр, меньших её и входящих в запись этого числа, например, числа 4 444 333 210 и 7 665 432 210. Сколько всего равномерноубывающих десятизначных чисел? **($511=2^9-1$. Начнём выбирать цифру для числа, начиная с разряда единиц. Первая цифра однозначно 0, вторая − либо 0, либо 1 (два варианта выбора), каждая следующая цифра также выбирается двумя способами (либо прежняя цифра, либо большая её на единицу). Всего будет $2^9=512$ вариантов выбора. Но один случай нам не даёт десятизначного числа − когда на каждом шаге был выбран 0.)**

16. Электронные часы показывают два числа: часы и минуты в режиме 24 часов. Вася, взглянув на циферблат своих часов, обнаружил, что разность между большим и меньшим из этих чисел равна 30. Какой может быть разность между большим и меньшим из этих чисел через 30 минут? **(Либо 1, либо 23. Число часов не может быть больше 23, поэтому большим является число минут и оно больше 30. Значит за 30 минут до того, как Вася взглянул на часы, был тот же час, а число часов равнялось числу минут, и их разность равнялась нулю. Через 30 минут после того, как он взглянул на часы, час будет следующий, а число минут будет таким же, как и час назад. Таким образом, разность будет равна разности между двумя числами, показывающими количество часов в двух соседних часах, то есть одному или двадцати трем (когда часы в разных сутках).)**