XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VIII Турнир математических игр.

1-я игра. «Домино». ***<u>Старшая лига (10-11 классы).</u>*** **<u>Решения</u>*. 16 сентября 2015 года***

0–0. Сколько существует раскрасок доски 8×8 таких, что при перестановке строк местами и столбцов местами можно получить доску с шахматной раскраской? (**$C_8^4 \cdot C_7^4 = 70 \cdot 35 = 2450$. Каждая раскраска определяется раскраской клеток в левом столбце - C_8^4 вариантов, а затем уже в нижней строке - C_7^4.)**

0–1. Число 1 – корень уравнения $(x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2=0$. Найдите сумму $a+b+c$. **(<u>–3</u>. Заметим, что равенство возможно только в случае $x+a=x+b=x+c=0$, значит, если 1 – корень уравнения, то $a=b=c=-1$ и их сумма равна (–3).)**

0–2. Найдите наименьшее значение суммы $|x|+|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|$. **(<u>6</u>. Это выражение равно сумме расстояний на числовой прямой от точки *x* до точек 0, -1, -2, -3, -4. При x=-2 эта сумма равна 6, а при удалении от точки (–2) эта сумма будет увеличиваться.)**

0–3. Какое наименьшее количество точек на плоскости надо взять, чтобы среди попарных расстояний между ними встретились числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64? **(<u>8 точек</u> $A_1, A_2, ..., A_8$, расположенных на расстояниях $A_1A_2=1$, $A_2A_3=2$, ..., $A_7A_8=64$, удовлетворяют условию. Покажем, что меньшего числа точек на плоскости расположить нельзя. Для каждого $k=0, 1,..., 6$ выберем пару точек, между которыми расстояние равно 2^k, и соединим их отрезками. Из неравенства треугольника следует, что полученные 7 отрезков (и никакая часть из них) не образуют замкнутого многоугольника, т.к. самый длинный из любого набора выбранных отрезков длиннее суммы остальных выбранных отрезков. Следовательно, число точек должно по крайней мере на 1 превосходить число этих отрезков, т. е. быть не меньшим 7+1=8.)**

0–4. Сложили все натуральные числа, меньшие 1000, сумма цифр каждого из которых равна *N*. Найдите все *N*, при которых сумма таких чисел делится на *N*? **(<u>1≤*N*≤27</u>. Числа разбиваются на тройки, в сумме кратные *N*, $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=(a+b+c)\cdot 111$. Случаи равных цифр и $N\,\vdots\,3$ рассматриваем отдельно.)**

0–5. Какое наибольшее количество прямых можно расположить на плоскости таким образом, чтобы среди любых 10 из них нашлись две прямые, образующие угол 60°? **(<u>27</u>. *Пример*. Проведем через одну точку три прямые, делящие полный угол на шесть углов по 60°, затем добавим к каждой 8 параллельных ей прямых. *Доказательство оценки*. Предположим, что у нас не менее 28 прямых. Разобьём их на несколько семейств по следующему принципу: две прямые принадлежат одному семейству, если они параллельны или угол между ними равен 60°. Каждое семейство состоит из трёх наборов параллельных прямых. По принципу Дирихле, один из этих наборов содержит не меньше трети всех прямых этого семейства. Выбрав из каждого семейства по такому набору, мы получим набор из прямых, содержащий не менее трети из 28 прямых, то есть не менее 10 прямых, и угол между любыми двумя из них не равен 60°. Противоречие.)**

0–6. В клетках таблицы 4×4 расставлены все целые числа от 1 до 16. Раз в минуту каждое число таблицы заменяется на среднее арифметическое своих соседей (по стороне клетки). Какое наименьшее возможное значение может быть у самого меньшего числа таблицы через две минуты? ($\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$. **Разберём три возможных случая расположения меньшего числа через две минуты – в углу, на стороне и в центре, и оценим его значение. Получим, что минимальное значение 13/6 будет при расположении этого числа в углу (на месте 1) со следующим расположением чисел от 1 до 4.)**

3			
	2		
1		4	

1–1. Чему равна сумма всех целых делителей числа 2015? **(<u>0</u>, т.к. все делители разбиваются на пары противоположных по знаку)**

1–2. Приведите пример набора, состоящего из 4 различных чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. **(например, 1, 2, –1, –2)**

1–3. При каких натуральных $n≥2$ уравнение $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}=1$ имеет решение, в котором все x_i – различные натуральные числа? **(<u>*n*≥3</u>. Для *n*=3 и *n*=4 имеем следующие два решения $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$, а для каждого большего количества слагаемых решение получа-**

ем из случая на 2 слагаемых меньше превращением самой маленькой дроби в сумму трёх ещё меньших дробей по формуле $\frac{1}{k}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{6k}$. При *n*=2 единицу можно представить только в виде суммы двух равных дробей $\frac{1}{2}$.)

1–4. Найдите площадь треугольника *ABC*, если стороны *AB* и *AC* равны соответственно 11 и 13, а медиана *AM* равна 10. **(<u>66</u>. Достроим Δ*ABC* до параллелограмма *ABDC*, тогда площадь Δ*ABC* равна площади треугольника *ABD*, стороны которого равны 11, 13 и 20 (удвоенной медиане *AM*). По формуле Герона найдём площадь $\sqrt{22\cdot(22-11)\cdot(22-13)\cdot(22-20)}=66$.)**

1–5. Найдите область значений функции y=3cos$x$–3cos2x–2. **([-8; 1,375]. Запишем нашу функцию в виде y=3cos$x$–3(2cos^2x–1) –2=-6cos^2x+3cos$x$+1=-6t^2+3t=1, где t∈[-1;1]. Максимум этой функции будет в точке 0,25 и равен 1,375. В граничных точках интервала функция принимает значения -8 и -2, значит, областью значений этого квадратного трёхчлена будет [-8; 1,375].)**

1–6. Две прямые на плоскости, пересекающиеся под углом 46°, являются осями симметрии фигуры F. Какое наименьшее число осей симметрии может иметь эта фигура? **(<u>90</u>. При симметрии одной оси относительно другой будет появляться новая ось симметрии, значит, все прямые, проходящие через одну точку и идущие через 2° (где 2=НОД(360, 46)), будут давать оси симметрии. Это будет 360:2=180 лучей и, соответственно, 90 прямых – осей симметрии.)**

2–2. Каждая клетка доски 8×8 окрашена в какой-то цвет, при этом в любой строке и любом столбце есть клетки ровно двух цветов. Какое наибольшее количество различных цветов может быть использовано? *Приведите пример и ответ*. **(<u>9 цветов, например, поставим 8 клеток разного цвета по главной диагонали, а остальные клетки покрасим в 9-ый цвет</u>. Предположим, что можно взять не менее 10 цветов. Т.к. в первой строке ровно 2 цвета, то остальные (не менее 8) цвета должны оказаться в оставшейся доске 7×8. Значит, по принципу Дирихле из 7 строк найдётся строка (с точностью до симметрии можно считать, что вторая), в которой 2 новых цвета, отличных от цветов первой строки. Но тогда в каждом столбце стоят только клетки цветов из первой и второй строки, т.к. это будут два разных цвета. Значит, на доске окажется ровно 4 цвета. Противоречие, значит, всего не более 9 цветов.)**

2–3. Решите уравнение $\sigma(2n)=3\sigma(n)$ в натуральных числах, где $\sigma(n)$ – сумма всех натуральных делителей натурального числа *n*. **(<u>Все нечётные натуральные *n*</u>. Воспользуемся формулой суммы всех натуральных делителей**

$$\sigma(n)=(1+p_1+p_1^2+...+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+...+p_2^{\alpha_1})...(1+p_k+p_k^2+...+p_k^{\alpha_1})$$

, где используется разложение на простые множители числа $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_1}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_1}$. Заметим, что при нечётном *n* у числа 2*n* добавится дополнительный множитель (1+2)=3, который и даст нам выполнение требуемого равенства. При чётном *n* самая первая скобка увеличится ровно на одно слагаемое – следующую степень двойки, а сам этот множитель увеличится менее чем в 3 раза, значит, $\sigma(2n)<3\sigma(n)$.)

2–4. При каких значениях *a* неравенство $\frac{(x-2)^2(x+a)}{x-7}\le 0$ имеет единственное решение? **(<u>*a*= –7</u>. Очевидно, что *x*=2 является решением при любом *a*, поэтому условие задачи будет выполнено только в том случае, если неравенство $\frac{x+a}{x-7}\le 0$ либо не будет иметь решений, либо его решением снова будет *x*=2. Методом интервалов, рассмотрев разные случаи для *a* относительно -7 найдём, что это выполняется только при *a*=-7.)**

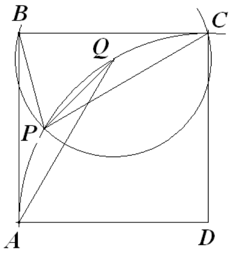
2–5. В некоторых клетках доски 5×9 находятся фишки. За одну операцию каждая фишка перемещается в соседнюю по стороне клетку по следующему правилу: первый ход каждая фишка делает в произвольном направлении, а если предыдущий её ход был горизонтальным, то следующий ход должен быть вертикальным и наоборот. При каком наибольшем количестве фишек существуют расстановка и такой порядок операций, когда после каждой операции на каждой клетке будет стоять не более одной фишки?

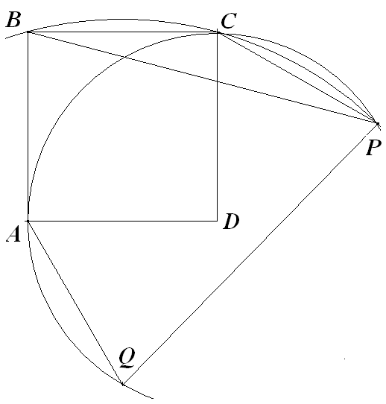
1	2	1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1

(<u>32</u>, расставим фишки в прямоугольнике 4×8, разобьём его на квадраты 2×2 и в каждом квадрате фишки ходят по часовой стрелке. Если фишек

будет больше 32, то применим раскраску доски квадратами 2×2 в четыре цвета. Заметим, что каждая фишка при своих ходах циклически за 4 операции повторяет все цвета в некотором порядке. Тогда по принципу Дирихле найдётся одна из первых четырёх операций, когда на 8 клетках цвета 3 окажутся не менее 9 фишек, значит, будет клетка хотя бы с двумя стоящими на ней фишками.)

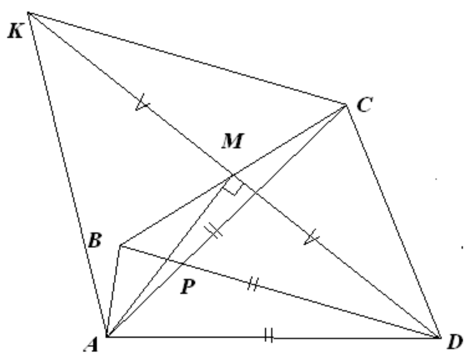
2–6. Пусть *ABCD* – единичный квадрат, *P* и *Q* – такие точки, что *Q* – центр описанной окружности треугольника *BPC*, а *D* – центр описанной окружности треугольника *PQA*. Найти все возможные значения длины отрезка *PQ*. **(** $PQ=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{2}}$**. *Q* лежит на серединном перпендикуляре к *BC, AD=DQ*, следовательно, *ΔADQ* правильный. Существуют 2 варианта расположения *Q*: вне квадрата и внутри него. Если *Q* вне квадрата, то** $QC=\sqrt{0{,}5^2+(1+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}<1$**, т.е. такое расположение возможно, т.к. окружности с центрами в *Q* и *D* и радиусами *DA* и *QB* соответственно пересекаются. *QP=QC=*** $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$**. Если *Q* внутри квадрата, то** $PQ=QC=\sqrt{0{,}5^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ **.)**



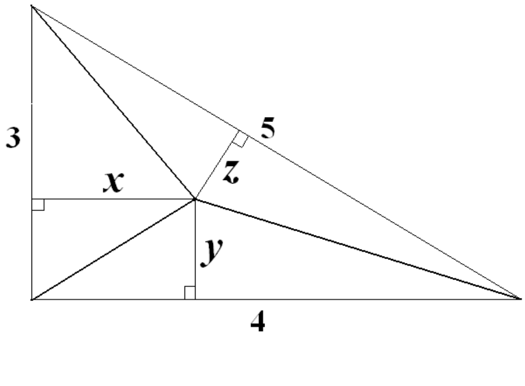


3–3. По окончании математической игры «Домино» оказалось, что команда-победитель решила все задачи, а в графе «штраф» у неё «–2» балла. Сколько баллов могла в итоге набрать эта команда? **(<u>Любое целое число от 120 до 176</u>. Заметим, что эта команда гарантированно набрала все большие «половины» баллов от каждой задачи-доминошки, в том числе и 10 за задачу «0-0», что составляет в сумме 10+7·6+6·5+5·4+4·3+3·2+2·1=122, при этом команда действительно могла набрать это число баллов, если все задачи (кроме «0-0») она решила со второй попытки. С учётом 2 штрафных баллов команда набрала бы 120 баллов. Все же остальные баллы до 176 (178 – максимум при отсутствии штрафов) команда могла получить за счёт тех задач, которые она бы решила с первой попытки, что давало бы прибавки от 1 до 6 баллов, что гарантирует нам любой из возможных промежуточных итогов от 120 до 176.)**

3–4. Точка *M* – середина стороны *BC* выпуклого четырёхугольника *ABCD*, в котором *AC=BD=AD*. Оказалось, что угол *AMD* – прямой. Чему может быть равен угол между диагоналями четырёхугольника *ABCD*? **(<u>60°</u>. Отложим на луче *DM* точку *K* таким образом, чтобы отрезки *KM* и *DM* были равны. Заметим, что тогда треугольники *BMD* и *CMK* будут равны по двум сторонам и углу между ними, значит, *KC=BD*. Кроме того, в треугольнике *KAD* отрезок *AM* является высотой и медианой, значит, этот треугольник будет равнобедренным с *AD=AK*. Тогда из равенств *KC=BD=AC=AD=AK* следует, что треугольник *ACK* – равносторонний. Тогда угол между диагоналями четырёхугольника равен 60°, т.к. *BD* и *KC* параллельны, а угол между прямыми *KC* и *CA* равен 60°.)**



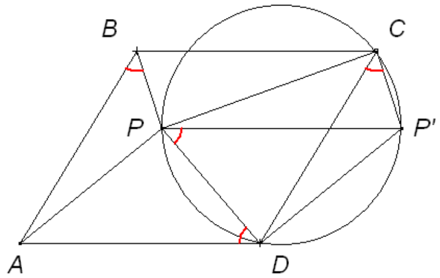
3–5. Чему равно максимальное произведение расстояний от внутренней точки треугольника со сторонами 3, 4, 5 до прямых, содержащих его стороны? ($\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$ **. Заметим, что данный треугольник – прямоугольный, т.к. его стороны удовлетворяют теореме Пифагора. Пусть нужные нам отрезки, проведённые соответственно к сторонам 3, 4 и 5 равны *x, y, z*, тогда удвоенная пло-**



щадь всего треугольника равна 12=3·4=3*x*+4*y*+5*z*, т.к. данные отрезки фактически являются высотами трёх треугольников, на которые разрезается исходный треугольник отрезками от внутренней точки до вершин. Из неравенства Коши следует, что $\sqrt[3]{3x\cdot 4y\cdot 5z}\le\frac{3x+4y+5z}{3}=\frac{12}{3}=4$**, откуда получаем, что** $xyz\le\frac{4^3}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{16}{15}$**, при этом равенство достигается при условии 3*x*=4*y*=5*z*, что возможно при соответствующих значениях *x, y* и *z*.)**

3–6. Сколькими способами число 36 можно представить в виде суммы не менее чем трёх натуральных слагаемых? *(Порядок слагаемых важен, т.е., например, 2+20+1+13 отличается от 13+2+1+20.)* **(<u>2^{35}–36</u>. Заметим, что если выписать в ряд 36 единиц, то каждый способ составления суммы соответствует способу расставить в некоторых промежутках между единицами знака «+», когда количество единиц между соседними плюсами и даст соответствующее слагаемое в сумму. Всего таких способов 2^{35}, но один из посчитанных нами способов соответствует сумме, в которой ровно одно слагаемое 36 (это когда мы не поставим ни одного знака «+»), а ещё 35 посчитанных нами способов соответствуют сумме из двух слагаемых (это когда мы ставим один «+»). Значит, всего 2^{35}-36 нужных нам сумм.)**

4–4. Внутри параллелограмма *ABCD* взята такая точка *P*, что ∠*ABP* = ∠*PDA*. Какие значения может принимать сумма углов ∠*BPA* и ∠*CPD*? **(<u>180°</u>. Рассмотрим параллелограмм *APP'D*. Тогда Δ*ABP*=Δ*DCP'*, т.к. второй получается из первого переносом на вектор $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Тогда ∠*DCP'*=∠*ABP*=∠*PDA*=∠*DPP'*, следовательно, *DPCP'* – вписанный четырёхугольник, т.к. точки *P* и *C* лежат по одну сторону от прямой *DP'* и из них отрезок *DP'* виден под одним и тем же углом. Значит, ∠*BPA*+∠*CPD*=∠*CP'D*+∠*CPD*=180° по признаку вписанного четырёхугольника.)**



4–5. В натуральном ряду от 1 до *N*≥2 два игрока по очереди зачёркивают группы подряд идущих чисел, начиная с наименьшего из ещё не зачёркнутых, и отдают эту группу своему сопернику. Выигрывает тот, у кого первого произведение чисел будет делиться на фиксированное натуральное число *K*, где 2≤*K*≤*N*. При каких *K* и *N* при правильной игре выиграет первый игрок? **(<u>всегда выиграет первый</u> – передача хода с помощью числа 1)**

4–6. Точка *A* является вершиной единичного куба, а точки *B* и *C* лежат на рёбрах этого куба, причём длины сторон *AB* и *AC* треугольника *ABC* равны соответственно 1,25 и 1,5. Найдите длину третьей стороны этого треугольника. **($\frac{\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{17}}{4},\frac{\sqrt{21}}{4}$. Т.к. 1,25<$\sqrt{2}$<1,5, то точка *B* находится на одной грани с точкой *A* (но на разных рёбрах), а точка *C* находится на одном из трёх рёбер, не лежащих в гранях с точкой *A*. Введём на кубе систему координат так, что *A*(0; 0; 0), *B* (1; 0; ¾). Тогда для точки *C* возможен один из трёх случаев координат (1; 1; ½), (1; ½; 1) или (½; 1; 1), для каждого из которых и найдём нужное нам расстояние *BC*.)**

5–5. Найдите формулу для вычисления суммы 1·*n*+2·(*n*-1)+3·(*n*-2)+…+(*n*-1)·2+*n*·1 для каждого натурального *n*. **($\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Доказать эту формулу можно по индукции. Выйти на неё можно через гипотезу, что это будет многочлен третьей степени an^3+bn^2+cn+d, воспользовавшись методом неопределённых коэффициентов и подставив в этот многочлен его значения 1, 4, 10, 20 при *n*, равных соответственно 1, 2, 3, 4.)**

5–6. Из какого числа равносторонних треугольников со стороной 1 может состоять шестиугольник, все углы которого равны 120°, а все стороны различны и равны шести числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, стоящим в произвольном порядке? **(<u>65 или 67</u>. Такой шестиугольник получается из правильного треугольника отрезанием трёх острых углов, тогда сумма любых двух соседних сторон шестиугольника равна сумме двух противоположных им сторон. В результате рядом с 6 не могут находиться 5, 4, а также 2 и 3 одновременно, значит, возможны с точностью до симметрии ровно 2 варианта порядка сторон - (6, 1, 4, 5, 2, 3) и (6, 1, 5, 3, 4, 2), получаемых из треугольников со сторонами 10 и 9 отрезанием треугольников со сторонами 1, 5, 3 и 1, 3, 2 соответственно. Тогда количества треугольников в этих шестиугольниках равны $10^2-1^2-5^2-3^2=65$ и $9^2-1^2-3^2-2^2=67$.)**

6–6. Найдите все возможные значения суммы натуральных чисел *a*, *b* и *c* таких, что *abc*=2310 и $a^2b+b^2c+c^2a=ab^2+bc^2+ca^2$. **(<u>2312</u>. Т.к. в разложении числа 2310=2·3·5·7·11 все простые множители встречаются только по одному разу, то числа *a, b, c* попарно взаимно простые. Рассмотрим случай *a*≥*b*≥*c*. Заметим, что из второго уравнения, в котором есть четыре числа, кратных *a*, следует, что $b^2c-bc^2=bc(b-c)$ делится на *a*. Тогда в силу взаимной простоты данных трёх чисел *a, b, c* следует, что (*b*–*c*) делится на *a*, что в случае натуральных *a*≥*b*≥*c* возможно только при *b*=*c* и в силу взаимной простоты эти числа равны 1, тогда *a*=2310. В случаях другой упорядоченности нашей тройки чисел получим остальные варианты, т.е. возможны три тройки, удовлетворяющие условию, - (2310, 1, 1), (1, 2310, 1), (1, 1, 2310), значит, сумма данных трёх чисел может быть равна только 2312.)**