XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VIII Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль». ***Младшая лига (7-9 классы).* *17 сентября 2015 года***

1. Действительные числа a, b, c удовлетворяют неравенствам $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ и $|c| \geq |a + b|$. Какие значения может принимать сумма $a + b + c$?

2. Оклейте куб 2×2×2 в один слой четырьмя одинаковыми развёртками куба 1×1×1.

3. Выпуклый пятиугольник состоит из единичного квадрата, к одной стороне которого гипотенузой, равной 1, присоединён равнобедренный прямоугольный треугольник. Разрежьте этот пятиугольник на три части так, чтобы из них можно было сложить новый равнобедренный треугольник. Покажите также как сложить.

4. Известно, что существуют 5 видов клетчатого тетрамино (квадрат 2×2, прямоугольник 1×4, в виде букв «Г», «Т» и «Z»). Закрасьте на белой доске 8×8 как можно меньше клеток в чёрный цвет так, чтобы среди любых четырёх клеток, образующих какое-нибудь тетрамино, хотя бы одна клетка была чёрной. *Укажите также это количество чёрных клеток.*

5. В ряд лежат 26 монет, среди которых ровно 2 подряд лежащих монеты являются фальшивыми, весящими меньше остальных – настоящих. За какое наименьшее количество взвешиваний на двухчашечных весах можно найти обе фальшивые монеты?

6. В треугольнике ABC с $\angle A=20^\circ$, $\angle B=120^\circ$ проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Найдите величину угла A_1B_1C.

7. На шахматную доску по очереди выставляются слоны так, что каждый новый поставленный слон бьёт не более одного выставленного на тот момент на доску слона. Какое наибольшее количество слонов можно выставить на доску по таким правилам?

8. Основания трапеции равны 4 и 9, а диагонали равны 5 и 12. Найдите площадь трапеции.

9. В однокруговом турнире участвуют 10 шахматистов. В некоторый момент оказалось, что в любой тройке шахматистов найдётся хотя бы один, сыгравший с двумя другими. Какое наименьшее количество партий могло быть сыграно к этому моменту?

10. В числе 9876543210 зачёркиваются цифры (от 1 до 9 штук) так, чтобы оставшееся число делилось на 3. Сколько таких различных чисел можно получить?

11. В некоторых клетках квадрата $n\times n$ стоят звездочки. Для каждой вертикали, горизонтали и диагонали (не обязательно главной; даже одна угловая клетка – тоже диагональ) известно количество стоящих на ней звездочек. При каких n всегда можно определить, где стоят звездочки?

12. Найдите все натуральные N, для которых существуют двузначные числа, которые в N раз больше суммы своих цифр.

13. Известно, что 13 является корнем каждого из уравнений $ax+b=0$, $bx+c=0$, $cx+a=0$. Найдите множество всех общих корней этих трёх уравнений.

14. По кругу стоят три единицы. Затем несколько раз осуществляется следующая операция: одновременно между каждыми двумя написанными числами по кругу вставляется число, равное их сумме. Процесс останавливается, когда количество чисел превысит 1000. Чему равна сумма всех написанных к данному моменту чисел?

15. Подмножество X множества "двузначных" чисел 00, 01, ..., 98, 99 таково, что в любой бесконечной последовательности цифр найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из X. Какое наименьшее количество чисел может содержаться в X?

16. O – центр описанной окружности треугольника ABC с $\angle A=40^\circ$, $\angle B=60^\circ$ и $\angle C=80^\circ$. Найдите $\angle OBK$, где BK – высота треугольника ABC.