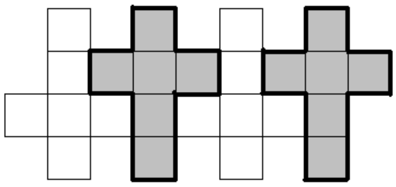
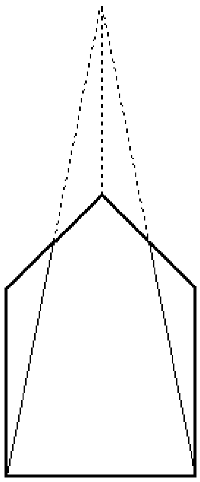
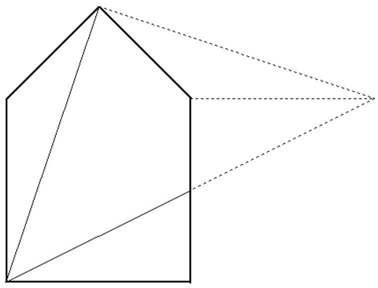
XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
VIII Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль». ***<u>Младшая лига (7-9 классы).</u>***
<u>Решения</u>. ***17 сентября 2015 года***

1. Действительные числа a, b, c удовлетворяют неравенствам $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ и $|c| \geq |a + b|$. Какие значения может принимать сумма $a + b + c$? **(<u>0</u>. Возведём все неравенства в квадрат и сложим. Получится $(a + b + c)^2 \leq 0$.)**

2. Оклейте куб 2×2×2 в один слой четырьмя одинаковыми развёртками куба 1×1×1. **(да, пример на рисунке)**

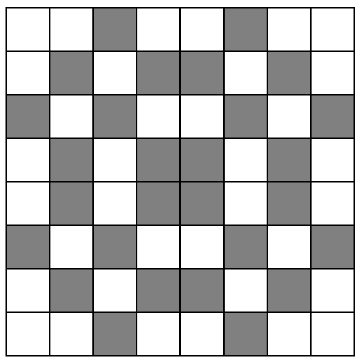






3. Выпуклый пятиугольник состоит из единичного квадрата, к одной стороне которого гипотенузой, равной 1, присоединён равнобедренный прямоугольный треугольник. Разрежьте этот пятиугольник на три части так, чтобы из них можно было сложить новый равнобедренный треугольник. Покажите также как сложить. **(на рис. два из возможных примеров разрезания)**

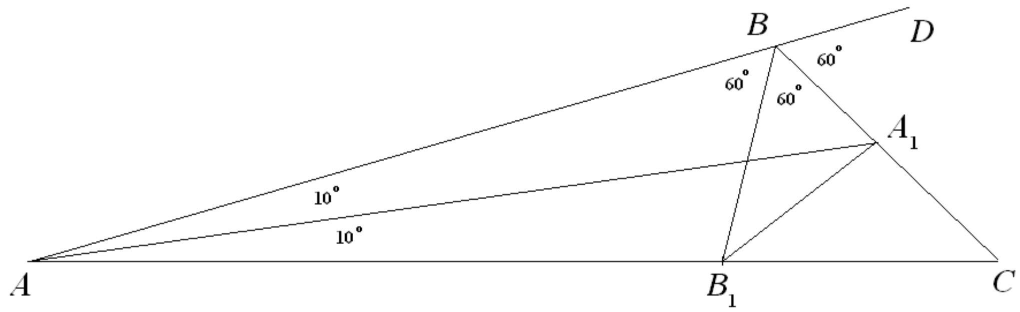
4. Известно, что существуют 5 видов клетчатого тетрамино (квадрат 2×2, прямоугольник 1×4, в виде букв «Г», «Т» и «Z»). Закрасьте на белой доске 8×8 как можно меньше клеток в чёрный цвет так, чтобы среди любых четырёх клеток, образующих какое-нибудь тетрамино, хотя бы одна клетка была чёрной. *Укажите также это количество чёрных клеток.* **(<u>28 клеток</u>. Видимо это и есть наименьшее количество. Доказательство оценки можно провести перебором большого количества случаев.)**



5. В ряд лежат 26 монет, среди которых ровно 2 подряд лежащих монеты являются фальшивыми, весящими меньше остальных – настоящих. За какое наименьшее количество взвешиваний на двухчашечных весах можно найти обе фальшивые монеты? **(<u>За 3 взвешивания</u>. Заметим, что при любом взвешивании каждой паре соседних монет (претендентов на фальшивость) соответствует один из трёх результатов взвешивания «легче», «равно» или «тяжелее» (0, 1, 2 при троичном кодировании) в сравнении левой и правой чаш весов. Тогда после двух взвешиваний каждая из 25 пар-претендентов получит троичный двузначный код, которых всего существует 3^2=9. Значит, по принципу Дирихле найдутся пары с одинаковым кодом, и мы не сможем гарантированно распознать фальшивую пару, даже если знаем её код при проведённых взвешиваниях. Следовательно, нам потребуется хотя бы 3 взвешивания. Приведём пример. Пронумеруем монеты слева направо числами от 1 до 26. На левую чашу положим монеты 1-9, на правую – 18-26. Тогда парам-претендентам от 1-й до 9-й соответствует итог «легче», парам с 10-й по 16-ю – «равно», парам с 17-й по 25-ю – «тяжелее». Значит, мы узнаем группу из не более 10 подряд лежащих монет, в которой будут обе фальшивые монеты (1-10, 10-17, 17-26). Берём ровно 10 таких монет, доба-**

вив во втором случае монеты номер 18 и 19. Перенумеруем заново эту десятку (1-10) и в ней взвесим слева монеты 1-3, справа – 8-10. Тогда парам-претендентам от 1-й до 3-й соответствует итог «легче», парам с 4-й по 6-ю – «равно», парам с 7-й по 9-ю – «тяжелее». Получаем четвёрку подряд лежащих монет, где пара фальшивых (1-4, 4-7, 7-10). Теперь в этой четвёрке сравниваем первую и четвёртую монеты и по итогам взвешивания узнаём пару фальшивых монет («легче» - 1-я пара, «равно» – 2-я, «тяжелее» – 3-я.)

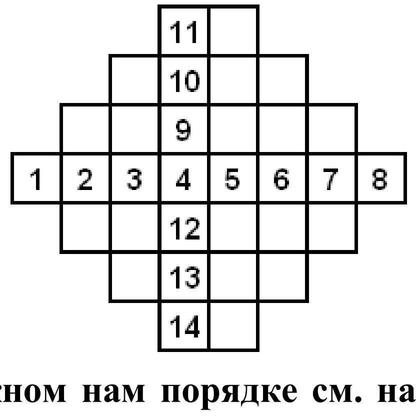
6. В треугольнике ABC с $\angle A=20^\circ$, $\angle B=120^\circ$ проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Найдите величину угла A_1B_1C. **(<u>40°</u>. Заметим, что точка A_1 лежит одновременно на биссектрисе угла A и биссектрисе угла DBB_1, где D лежит на продолжении луча AB за точку B, а значит, точка**



A_1 является центром вневписанной окружности треугольника ABC и лежит на биссектрисе угла BB_1C, равного 80°, как внешнего угла треугольника ABB_1. Значит, $\angle A_1B_1C=80^\circ:2=40^\circ$.)

7. На шахматную доску по очереди выставляются слоны так, что каждый новый поставленный слон бьёт не более одного выставленного на тот момент на доску слона. Какое наибольшее количество слонов можно выставить на доску по таким правилам? **(<u>28 слонов</u>, пример см. на рис., где число показывает порядок постановки слонов. Будем рассуждать для каждого из двух цветов шахматной доски отдельно, т.к. они на доске расположены симметрично и на каждом цвете будет одинаковый максимум выставленных слонов. Заметим теперь, что на каждом цвете слон фактически является ладьёй на «ступенчатой» доске, получаемой из доски 7×8 (см. рис.). Рассмотрим двудольный граф, в котором строки и столбцы «ступенчатой» доски – вершины двух долей, а ребро – ладья на пересечении соответствующих строки и столбца. Тогда в этом графе не должно быть циклов, иначе последняя по очереди из цикла поставленная на доску ладья будет бить не менее двух ладей, что противоречит условию. Значит, граф представляет из себя лес, а тогда в нём рёбер не больше чем количество вершин минус 1, что соответствует дереву, т.е. количество рёбер-ладей не больше 7+8–1=14. Пример расстановки 14 ладей в нужном нам порядке см. на рис., он переводится на шахматной доске в расстановку слонов на каждом цвете отдельно.)**

15							8
11	16					7	25
	10	17			6	24	
		9	18	5	23		
			4	19			
		3	26	12	20		
	2	27			13	21	
1	28					14	22



8. Основания трапеции равны 4 и 9, а диагонали равны 5 и 12. Найдите площадь трапеции. **(<u>30</u>. Удлиним большее основание на длину меньшего, тогда площадь тра-**

пеции будет равна площади треугольника, одна сторона которого равна сумме оснований трапеции 13, а две другие стороны равны диагоналям трапеции 5 и 12. А это согласно теореме Пифагора прямоугольный треугольник, т.к. $5^2+12^2=13^2$, значит, наша площадь равна $(5\cdot12)/2=30$.)

9. В однокруговом турнире участвуют 10 шахматистов. В некоторый момент оказалось, что в любой тройке шахматистов найдётся хотя бы один, сыгравший с двумя другими. Какое наименьшее количество партий могло быть сыграно к этому моменту? **(<u>40 партий</u>. Каждый сыграл не менее 8 партий, иначе, возьмём в одну с ним тройку двух шахматистов, с которыми он не сыграл, - противоречие. А так как каждая партия сыграна двумя шахматистами, то всего сыграно не менее $10\cdot8/2=40$ партий. В качестве примера возьмём турнир, в котором ровно 5 непересекающихся пар не сыгравших между собой шахматистов, т.е. каждый сыграл ровно по 8 партий.)**

10. В числе 9876543210 зачёркиваются цифры (от 1 до 9 штук) так, чтобы оставшееся число делилось на 3. Сколько таких различных чисел можно получить? **(<u>350</u>$=22\cdot2^4-1-1$ чисел. Переберём все варианты остатков цифр по модулю 3 – 0, 111, 12, 1122, 222, 111222, для каждого из которых подсчитаем количества комбинаций распределения самих цифр – 1, 1, $3\cdot3=9$, $3\cdot3=9$, 1, 1 – всего 22 варианта. И умножим это число на 2^4 – количество способов выбора цифр с остатком 0. Но два недопустимых варианта (взять все цифры и не взять ни одной цифры) исключим из рассмотрения.)**

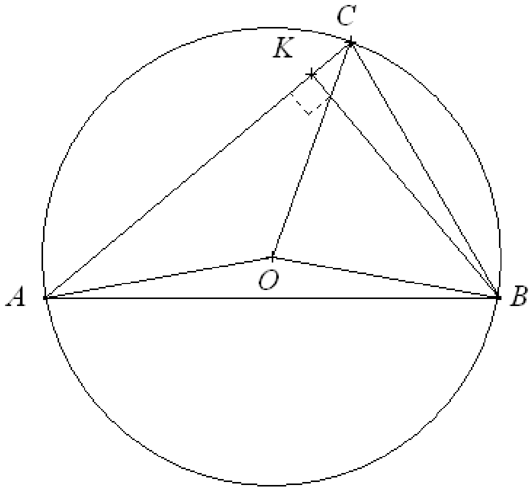
11. В некоторых клетках квадрата $n\times n$ стоят звездочки. Для каждой вертикали, горизонтали и диагонали (не обязательно главной; даже одна угловая клетка – тоже диагональ) известно количество стоящих на ней звездочек. При каких n всегда можно определить, где стоят звездочки? (**<u>1, 2 и 3</u>. Для $n \le 3$ тактика достаточно очевидна (учитывая, что углы можно проверить непосредственно). Если же $n \ge 4$, то невозможно отличить квадрат, где стоят звёздочки в клетках *b*1, *a*3, *c*4 и *d*2, а клетки *a*2, *b*4, *c*1 и *d*3 пусты, от квадрата, где стоят звёздочки в клетках *a*2, *b*4, *c*1 и *d*3, а клетки *b*1, *a*3, *c*4 и *d*2 пусты.)**

12. Найдите все натуральные N, для которых существуют двузначные числа, которые в N раз больше суммы своих цифр. **(<u>$2\le N\le 10$</u>. Составим уравнение $\overline{ab}=N\cdot(a+b)$ для двузначного числа $\overline{ab}$. Тогда из него получим, что $(10-N)\cdot a=(N-1)\cdot b$. А данное уравнение имеет решение в цифрах только при $2\le N\le 10$, например, $a=N-1$, $b=10-N$.)**

13. Известно, что 13 является корнем каждого из уравнений $ax+b=0$, $bx+c=0$, $cx+a=0$. Найдите множество всех общих корней этих трёх уравнений. **(<u>Множество всех действительных чисел</u>. Если 13 является корнем каждого уравнения, то $a=-13c=13^2\cdot b=-13^3\cdot a$, значит, $a=0=b=c$. Тогда уравнения имеют вид $0\cdot x+0=0$ и множеством общих корней будет множество всех действительных чисел.)**

14. По кругу стоят три единицы. Затем несколько раз осуществляется следующая операция: одновременно между каждыми двумя написанными числами по кругу вставляется число, равное их сумме. Процесс останавливается, когда количество чисел превысит 1000. Чему равна сумма всех написанных к данному моменту чисел? **(<u>$3^{10}=59049$</u>. На каждом шаге количество чисел удваивается, а их общая сумма утраивается, значит, всего будет 9 операций, т.к. $3\cdot2^8<1000<3\cdot2^9$. Значит, вся сумма станет равна $3\cdot3^9=3^{10}$.)**

15. Подмножество X множества "двузначных" чисел 00, 01, ..., 98, 99 таково, что в любой бесконечной последовательности цифр найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из X. Какое наименьшее количество чисел может содержаться в X? **(<u>55 чисел</u>. Так как в последовательности цифр *n m n m*... найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из *X*. Тогда для любых двух различных цифр *n* и *m* либо число $\overline{nm}$ содержится в *X*, либо число $\overline{mn}$ содержится в *X*. При *n*=*m* получаем, что все «двузначные» числа из одинаковых цифр содержатся в *X*. Следовательно, в *X* не менее чем 10+(100–10)/2=55 чисел. В качестве примера подходит множество $X = \{\overline{mn} \mid m \le n\}$. Действительно, если в бесконечной последовательности цифр не найдутся две подряд идущие цифры, из которых первая не больше второй, то цифры в этой последовательности строго убывают, что невозможно.)**



16. O – центр описанной окружности треугольника ABC с $\angle A=40°$, $\angle B=60°$ и $\angle C=80°$. Найдите $\angle OBK$, где BK – высота треугольника ABC. **(<u>40°</u>. Обозначим равные углы равнобедренных треугольников *OAB, OBC, OCA* следующим образом: $\angle OAB=\angle OBA=\alpha$, $\angle OAC=\angle OCA=\beta$. Тогда $\angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=2\alpha+2\beta=2(\angle OAB+\angle OAC)=2\angle A=80°$. Тогда $\angle OBC=\angle OCB=(180°-80°)/2=50°$, значит, $\beta=\angle BCA-\angle OCA=80°-50°=30°$, $\alpha=\angle A-\beta=40°-30°=10°$. Следовательно, $\angle OBK=\angle B-\angle ABO-\angle CBK=60°-\alpha-(90°-\angle C)=60°-10°-(90°-80°)=40°$.)**