XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VIII Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль»**. *<u>Старшая лига (10-11 классы).</u> 17 сентября 2015 года***

1. Число x удовлетворяет равенству $x^2+\frac{1}{x^2}=7$. Чему равно $x^5+\frac{1}{x^5}$?

2. Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, M – середина стороны AC. Известно, что $BO=OM$. Найдите минимальное значение $\angle BOM$.

3. Выпуклый пятиугольник состоит из единичного квадрата, к одной стороне которого гипотенузой, равной 1, присоединён равнобедренный прямоугольный треугольник. Разрежьте этот пятиугольник на три части так, чтобы из них можно было сложить новый равнобедренный треугольник. Покажите также как сложить.

4. Известно, что существуют 5 видов клетчатого тетрамино (квадрат 2×2, прямоугольник 1×4, в виде букв «Г», «Т» и «Z»). Закрасьте на белой доске 8×8 как можно меньше клеток в чёрный цвет так, чтобы среди любых четырёх клеток, образующих какое-нибудь тетрамино, хотя бы одна клетка была чёрной. *Укажите также это количество чёрных клеток.*

5. В ряд лежат 26 монет, среди которых ровно 2 подряд лежащих монеты являются фальшивыми, весящими меньше остальных – настоящих. За какое наименьшее количество взвешиваний на двухчашечных весах можно найти обе фальшивые монеты?

6. Дан вписанный шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB=BC=x$, $CD=DE=y$, $EF=FA=z$. Найдите все отношения x:y:z, при которых главные диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

7. На шахматную доску по очереди выставляются слоны так, что каждый новый поставленный слон бьёт не более одного выставленного на тот момент на доску слона. Какое наибольшее количество слонов можно выставить на доску по таким правилам?

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A=90°$, а $BC=CD=1$. Какую наибольшую площадь может иметь этот четырёхугольник?

9. Пусть a, b и c – попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные целые значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

10. В числе 9876543210 зачёркиваются цифры (от 1 до 9 штук) так, чтобы оставшееся число делилось на 3. Сколько таких различных чисел можно получить?

11. В некоторых клетках квадрата $n\times n$ стоят звездочки. Для каждой вертикали, горизонтали и диагонали (не обязательно главной; даже одна угловая клетка – тоже диагональ) известно количество стоящих на ней звездочек. При каких n всегда можно определить, где стоят звездочки?

12. Сумма чисел x и y равна 1. Найдите наибольшее значение выражения xy^4+x^4y.

13. Найдите все равнобедренные треугольники, отличные от равностороннего, в которых отношение длин сторон равно отношению величин противолежащих им углов.

14. Найдите все такие целые n, что число $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ рационально.

15. Подмножество X множества "двузначных" чисел 00, 01, ..., 98, 99 таково, что в любой бесконечной последовательности цифр найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из X. Какое наименьшее количество чисел может содержаться в X?

16. При каких значениях b уравнение $\frac{b\cdot\cos x}{2\cos 2x-1}=\frac{b+\sin x}{(\cos^2 x-3\sin^2 x)\cdot tgx}$ имеет решение?