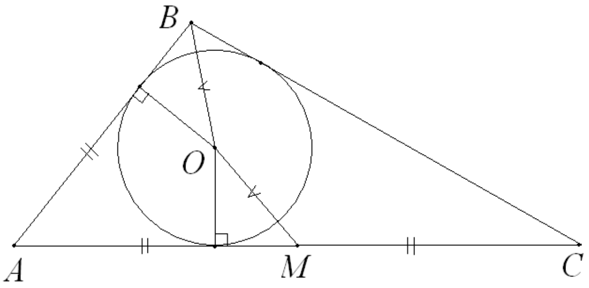
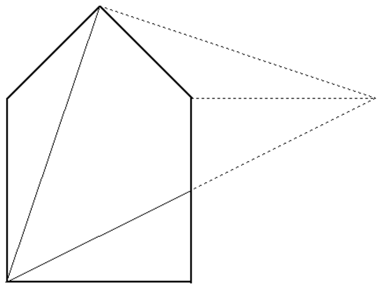
XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VIII Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль»***.*** ***<u>Старшая лига (10-11 классы).</u>*** **<u>Решения</u>.** ***17 сентября 2015 года***

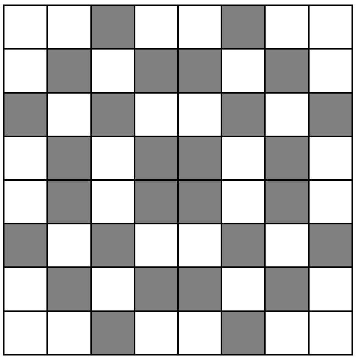
1. Число x удовлетворяет равенству $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Чему равно $x^5+\dfrac{1}{x^5}$? **(±123. Из равенства $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$ следует, что $x+\dfrac{1}{x}=\pm 3$. Из равенства $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3(x+\dfrac{1}{x})$ найдём $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\pm 18$, а из равенства $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)=x^5+\dfrac{1}{x^5}+x+\dfrac{1}{x}$ найдём нужную нам сумму.)**

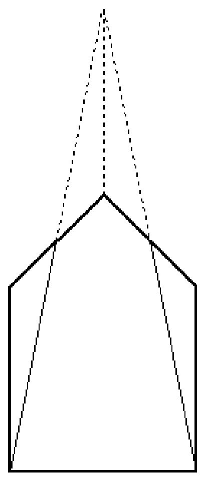


2. Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, M – середина стороны AC. Известно, что $BO=OM$. Найдите минимальное значение $\angle BOM$. **(<u>150°</u>. Подсчёт углов показывает, что $\angle BOM=\angle BAC+\angle ABC=\alpha+\beta$, если считать $\angle ACB=\gamma$ меньшим углом треугольника. Кроме того, получаем, что $AC=2\cdot AB$. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $\dfrac{\sin\gamma}{AB}=\dfrac{\sin\beta}{AC}$, откуда $2\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta$. Значит, $\sin(\alpha+\beta)\le\dfrac{1}{2}$ и тупой угол $\angle BOM=\alpha+\beta\ge 150°$.)**



3. Выпуклый пятиугольник состоит из единичного квадрата, к одной стороне которого гипотенузой, равной 1, присоединён равнобедренный прямоугольный треугольник. Разрежьте этот пятиугольник на три части так, чтобы из них можно было сложить новый равнобедренный треугольник. Покажите также как сложить. **(на рис. два из возможных примеров разрезания)**



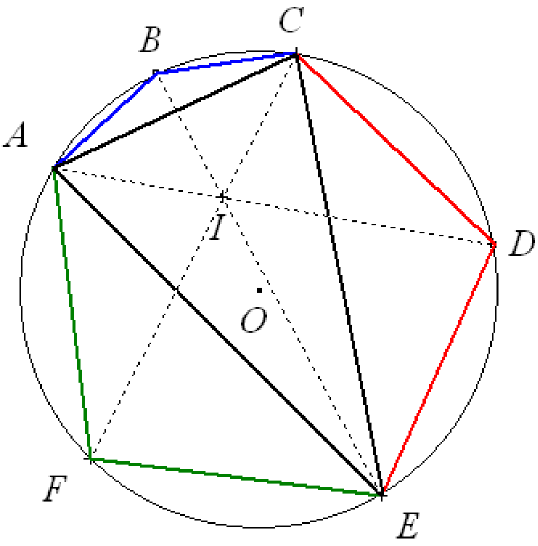


4. Известно, что существуют 5 видов клетчатого тетрамино (квадрат 2×2, прямоугольник 1×4, в виде букв «Г», «Т» и «Z»). Закрасьте на белой доске 8×8 как можно меньше клеток в чёрный цвет так, чтобы среди любых четырёх клеток, образующих какое-нибудь тетрамино, хотя бы одна клетка была чёрной. *Укажите также это количество чёрных клеток.* **(<u>28 клеток</u>. Видимо это и есть наименьшее количество. Доказательство оценки можно провести перебором большого количества случаев.)**

5. В ряд лежат 26 монет, среди которых ровно 2 подряд лежащих монеты являются фальшивыми, весящими меньше остальных – настоящих. За какое наименьшее количество взвешиваний на двухчашечных весах можно найти обе фальшивые монеты? **(<u>За 3 взвешивания</u>. Заметим, что при любом взвешивании каждой паре соседних монет (претендентов на фальшивость) соответствует один из трёх результатов взвешивания «легче», «равно» или «тяжелее» (0, 1, 2 при троичном кодировании) в сравнении левой и правой чаш весов. Тогда после двух взвешиваний каждая из 25 пар-претендентов получит троичный двузначный код, которых всего существует 3^2=9. Значит, по принципу Дирихле найдутся пары с одинаковым кодом, и мы не сможем гарантированно распознать фальшивую пару, даже если знаем её код при проведённых взвешиваниях. Следовательно, нам потребуется хотя бы 3 взвешивания. Приведём пример. Пронумеруем монеты слева направо числами от 1 до 26. На левую чашу положим монеты 1-9, на правую – 18-26. Тогда парам-претендентам от 1-й до 9-й соответствует итог «легче», парам с 10-й по 16-ю – «равно», парам с 17-й по 25-ю – «тяжелее». Значит, мы узнаем группу из не более 10 подряд лежащих монет, в которой будут обе фальшивые монеты (1-10, 10-17, 17-26). Берём ровно 10 таких монет, добавив во втором случае монеты номер 18 и 19. Перенумеруем заново эту десятку (1-10) и в ней**

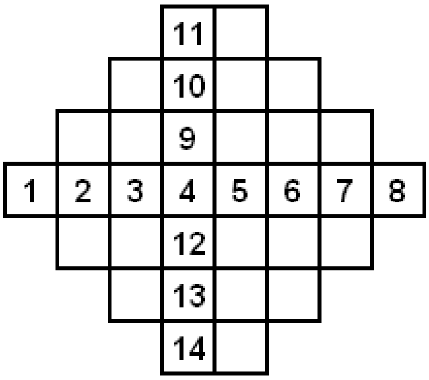
взвесим слева монеты 1-3, справа – 8-10. Тогда парам-претендентам от 1-й до 3-й соответствует итог «легче», парам с 4-й по 6-ю – «равно», парам с 7-й по 9-ю – «тяжелее». Получаем четвёрку подряд лежащих монет, где пара фальшивых (1-4, 4-7, 7-10). Теперь в этой четвёрке сравниваем первую и четвёртую монеты и по итогам взвешивания узнаём пару фальшивых монет («легче» - 1-я пара, «равно» – 2-я, «тяжелее» – 3-я.)

6. Дан вписанный шестиугольник *ABCDEF*, в котором *AB*=*BC*=*x*, *CD*=*DE*=*y*, *EF*=*FA*=*z*. Найдите все отношения *x*:*y*:*z*, при которых главные диагонали *AD*, *B*E и *C*F пересекаются в одной точке. **(<u>При любых отношениях положительных чисел</u>. Эти диагонали в силу равенства дуг будут являться биссектрисами углов *A*, *C* и *E* треугольника *ACE*, значит, пересекаются в одной точке – центре *I* вписанной окружности этого треугольника.)**



15							8
11	16					7	25
	10	17			6	24	
		9	18	5	23		
			4	19			
		3	26	12	20		
	2	27			13	21	
1	28					14	22

7. На шахматную доску по очереди выставляются слоны так, что каждый новый поставленный слон бьёт не более одного выставленного на тот момент на доску слона. Какое наибольшее количество слонов можно выставить на доску по таким правилам? **(<u>28 слонов</u>, пример см. на рис., где число показывает порядок постановки слонов. Будем рассуждать для каждого из двух цветов шахматной доски отдельно, т.к. они на доске расположены симметрично и на каждом цвете будет одинаковый максимум выставленных слонов. Заметим теперь, что на каждом цвете слон фактически является ладьёй на «ступенчатой» доске, получаемой из доски 7×8 (см. рис.). Рассмотрим двудольный граф, в котором строки и столбцы «ступенчатой» доски – вершины двух долей, а ребро – ладья на пересечении соответствующих строки и столбца. Тогда в этом графе не должно быть циклов, иначе последняя по очереди из цикла поставленная на доску ладья будет бить не менее двух ладей, что противоречит условию. Значит, граф представляет из себя лес, а тогда в нём рёбер не больше чем количество вершин минус 1, что соответствует дереву, т.е. количество рёбер-ладей не больше 7+8–1=14. Пример расстановки 14 ладей в нужном нам порядке см. на рис., он переводится на шахматной доске в расстановку слонов на каждом цвете отдельно.)**



8. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* $\angle A$=90°, а *BC*=*CD*=1. Какую наибольшую площадь может иметь этот четырёхугольник? **(**$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ **. Из четырёх таких фигур можно сложить равносторонний восьмиугольник с периметром 8, а среди восьмиугольников с фиксированным периметром наибольшую площадь имеет правильный, следовательно, четвёртую часть такого правильного восьмиугольника и представляет собой искомый четырёхугольник максимальной площади** $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$**, при этом *AC* будет биссектрисой угла *A* и *AB*=*AC*=*AD*.)**

9. Пусть *a*, *b* и *c* – попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные целые значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$. **(<u>8, 9, 10</u>. Пусть (*a*+*b*)(*b*+*c*)(*c*+*a*)/(*abc*) =*n* – целое число, тогда (*a*+*b*)(*b*+*c*)(*c*+*a*)=*n*·*abc*. (1) Если среди чисел *a*, *b* и *c* есть равные, то можно считать, в виду симметричности выражения (1), что *a*=*b*. Тогда НОД(*a*,*b*)=<u>*a*</u>=1 и выражение (1) принимает**

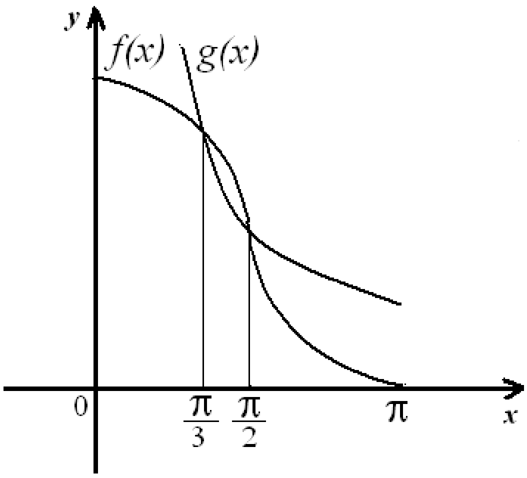
вид $(1+c)(1+c)2=nc$. Откуда следует, что $2⋮c$ и, значит, $c=1$ или $c=2$. В первом случае $n=8$, а во втором $n=9$. Если числа a, b и c попарно различны, то можно считать, что $a<b<c$. Если два числа взаимно просты, то сумма этих чисел взаимно проста с каждым из них, поэтому из (1) следует, что $a+b=mc$ (2) и $a+c=kb$ (3), где m и k – натуральные числа. Так как $a+b<2c$,то $mc<2c$ и, значит, $m<2$,т. е. $m=1$ и, следовательно, $a+b=c$ (4). Выразив из (3) c и подставив в (4), получим $a+b=kb–a$ или $2a=b(k–1)$. Так как a и b взаимно просты, то $2⋮b$. Учитывая, что $1\le a<b$ получаем, что $b>1$ и, значит, $b=2$. Тогда $a=1$ и $c=3$. Легко убедиться, что эти значения удовлетворяют условиям задачи и дают значение $n=10$.)

10. В числе 9876543210 зачёркиваются цифры (от 1 до 9 штук) так, чтобы оставшееся число делилось на 3. Сколько таких различных чисел можно получить? **(<u>350</u>=22·2^4–1–1 чисел. Переберём все варианты остатков цифр по модулю 3 – 0, 111, 12, 1122, 222, 111222, для каждого из которых подсчитаем количества комбинаций распределения самих цифр – 1, 1, 3·3=9, 3·3=9, 1, 1 – всего 22 варианта. И умножим это число на 2^4 – количество способов выбора цифр с остатком 0. Но два недопустимых варианта (взять все цифры и не взять ни одной цифры) исключим из рассмотрения.)**

11. В некоторых клетках квадрата $n\times n$ стоят звездочки. Для каждой вертикали, горизонтали и диагонали (не обязательно главной; даже одна угловая клетка – тоже диагональ) известно количество стоящих на ней звездочек. При каких n всегда можно определить, где стоят звездочки? (**<u>1, 2 и 3</u>. Для $n \le 3$ тактика достаточно очевидна (учитывая, что углы можно проверить непосредственно). Если же $n \ge 4$, то невозможно отличить квадрат, где стоят звёздочки в клетках *b*1, *a*3, *c*4 и *d*2, а клетки *a*2, *b*4, *c*1 и *d*3 пусты, от квадрата, где стоят звёздочки в клетках *a*2, *b*4, *c*1 и *d*3, а клетки *b*1, *a*3, *c*4 и *d*2 пусты.)**

12. Сумма чисел x и y равна 1. Найдите наибольшее значение выражения xy^4+x^4y. **(<u>1/12</u>. $xy^4+x^4y = xy(x^3+y^3) = xy(x+y)(x^2–xy+y^2) = xy(x+y)((x+y)^2–3xy) = xy(1–3xy)$. Положим $3xy = t$. Тогда $xy^4+x^4y = t(1–t)/3$. Произведение $t(1–t)$ достигает максимального значения 1/4 при $t = 1/2$, то есть при $xy = 1/6$. xy^4+x^4y в этом случае равно 1/12. Такое возможно, ибо $xy = 1/6 \Leftrightarrow x(1–x) = 1/6$, а произведение $x(1–x)$ при изменении x от 0 до 1/2 меняется от 0 до 1/4, то есть в какой-то момент будет равно 1/6 (или же просто покажем, что у получившегося квадратного уравнения есть корни).)**

13. Найдите все равнобедренные треугольники, отличные от равностороннего, в которых отношение длин сторон равно отношению величин противолежащих им углов. **(<u>Не существует таких треугольников</u>. Предположим, что такой треугольник со сторонами a, a, b ($a\ne b$) и углами α, α, $\beta=\pi-2\alpha$ существует. Тогда по теореме синусов получаем, что $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{b}{\sin(\pi-2\alpha)}=\dfrac{b}{\sin 2\alpha}=\dfrac{b}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ (здесь воспользовались также свойствами тригонометрических функций). Отсюда с учётом требуемого в условии отношения имеем, что $2\cos\alpha=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\pi-2\alpha}{\alpha}=\dfrac{\pi}{\alpha}-2$, тогда равенство $2(\cos\alpha+1)=\dfrac{\pi}{\alpha}$ должно выполняться при**



нашем α из интервала $(0;\frac{\pi}{2})$. Рассмотрим графики функций $f(x)=2(\cos x+1)$ и $g(x)=\dfrac{\pi}{x}$. Они пересекаются в точках $\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2}$, при этом на интервале $(0;\frac{\pi}{2})$ первая функция выпукла вверх, а вторая – вниз, значит, на этом интервале у них единственная точка пересечения $x=\dfrac{\pi}{3}$ (см. чертёж). Следовательно, равенство $2(\cos\alpha+1)=\dfrac{\pi}{\alpha}$ на интервале $(0;\frac{\pi}{2})$ выполняется только при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, что соответствует равностороннему треугольнику. Противоречие. *См.*

также задачу: *«Существует ли равнобедренный треугольник, отличный от равностороннего, в котором отношение длин сторон равно отношению величин противолежащих им углов?»* ***с игры «2 капитана» от 12 сентября 2010 года с VI Всероссийской смены «Юный математик».)***

14. Найдите все такие целые n, что число $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ рационально. (**Не существует таких *n*. Пусть число** $a=\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ **рационально. Тогда и** $a^2=2n+2\sqrt{n^2-1}$ **рационально. Значит,** $(n^2–1)$ **– полный квадрат. Это возможно только при** $n = \pm1$**. Отсюда** $a^2 = \pm2$**, что противоречит рациональности *a*.)**

15. Подмножество X множества "двузначных" чисел 00, 01, ..., 98, 99 таково, что в любой бесконечной последовательности цифр найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из X. Какое наименьшее количество чисел может содержаться в X? (**55 чисел. Так как в последовательности цифр *n m n m*... найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из *X*. Тогда для любых двух различных цифр *n* и *m* либо число** $\overline{nm}$ **содержится в *X*, либо число** $\overline{mn}$ **содержится в *X*. При *n*=*m* получаем, что все «двузначные» числа из одинаковых цифр содержатся в *X*. Следовательно, в *X* не менее чем 10+(100–10)/2=55 чисел. В качестве примера подходит множество** $X = \{\overline{mn} \mid m \le n\}$**. Действительно, если в бесконечной последовательности цифр не найдутся две подряд идущие цифры, из которых первая не больше второй, то цифры в этой последовательности строго убывают, что невозможно.)**

16. При каких значениях b уравнение $\dfrac{b\cdot\cos x}{2\cos 2x-1}=\dfrac{b+\sin x}{(\cos^2 x-3\sin^2 x)\cdot tgx}$ имеет решение? (**b<1/2, за исключением (-1), 0 и 1/3. Уравнение приводится к виду** $b\cdot\sin x=b+\sin x$ **с ограничениями на** $\sin x$**, который также не равен 0, -1, 1, -1/2 и 1/2.)**