XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VIII Турнир математических игр.

Математическая игра «Пенальти». ***Младшая лига (7-9 классы).*** ***18 сентября 2015 года***

1. На столе лежат n камней. Два игрока по очереди берут камни из кучи; каждый игрок при своём ходе может взять любое количество камней, являющееся квадратом натурального числа. Проигрывает тот, кто не может сходить. Найдите все n, не превосходящие 50, при которых второй игрок выиграет при правильной игре обоих.

2. Какое наименьшее количество шашек надо взять, чтобы при любой их расстановке на шахматной доске 8×8 некоторые три шашки обязательно образовывали прямоугольник 1×3?

3. Назовём трёхзначное число *хребтовым*, если средняя цифра в его десятичной записи больше, чем крайние, и *овражным*, если его средняя цифра меньше крайних. Каких чисел и на сколько больше: хребтовых или овражных?

4. $N\geq 3$ команд участвуют в футбольном турнире. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более, чем по одному разу, только "Металлург" и "Локомотив" сыграли дважды. При этом каждая команда сыграла хотя бы один матч. При каких N могло так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр?

5. M – середина катета AC, а точки N и K отмечены на гипотенузе $AB=2$ и катете $BC=1$. Какой наименьший периметр может иметь треугольник MNK?

6. При скольких n из первой сотни произведение первых n натуральных чисел не делится на их сумму?

7. Найдите величину меньшего угла равнобочной трапеции, если диагональ делит её на два равнобедренных треугольника.

8. На каком наибольшем количестве внутренних узлов шахматной доски 8×8 можно поставить запрещающий знак для прохода слона так, чтобы чернопольный слон смог всё же пройти с каждой чёрной клетки на каждую чёрную клетку?

Математическая игра «Пенальти». ***Младшая лига (7-9 классы).*** ***18 сентября 2015 года***

9. В однокруговом футбольном турнире участвовало 6 команд. Команды набрали соответственно 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очка. За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за проигрыш – 0. У какой из команд (и сколько) могло оказаться больше всего ничьих?

10. В таблице 10×10 по порядку расставлены все натуральные числа от 1 до 100 (в первой строке – от 1 до 10, во второй строке – от 11 до 20 и т.д.). Затем перед каждым из чисел поставлен знак "+" или "–" так, что в каждой строке и каждом столбце оказалось по шесть знаков "+" и четыре знака "–". Чему может быть равна сумма всех чисел таблицы с учётом расставленных знаков?

11. В некотором январе три воскресенья выпали на чётные дни. В каком следующем месяце такое могло быть?

12. Найдите все действительные числа x, целая часть которых является средним арифметическим самого числа и его дробной части. Целая часть числа $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x; дробная часть числа $\{x\}$ – это разность самого числа x и его целой части.

13. Найдите большую сторону параллелограмма, если его высоты, проведённые к смежным сторонам, равны 2 и 3, а его периметр равен 9.

14. На шахматную доску, первоначально пустую, по очереди ставятся кони по следующему правилу: если только что поставленный конь кого-то побил, то один из побитых им коней снимается с доски. Какое наибольшее количество коней можно поставить на доску с соблюдением данного правила?

15. Назовём два натуральных числа *двойниками*, если суммы их цифр равны друг другу и произведения их цифр также равны друг другу (например, 124 и 2212 – двойники). Найдите все числа, у которых нет двойников.

16. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC=1$, а биссектриса прямого угла A перпендикулярна одной из медиан. Найдите площадь треугольника ABC.