XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VIII Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти»**.** ***Младшая лига (7-9 классы).*** **Решения**. ***18 сентября 2015 года***

1. На столе лежат n камней. Два игрока по очереди берут камни из кучи; каждый игрок при своём ходе может взять любое количество камней, являющееся квадратом натурального числа. Проигрывает тот, кто не может сходить. Найдите все n, не превосходящие 50, при которых второй игрок выиграет при правильной игре обоих. **(2, 5, 7, 10, 12, 15, 17, 20, 22, 34, 39, 44, что можно найти с помощью расстановки выигрышных и проигрышных позиций)**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	-

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-

2. Какое наименьшее количество шашек надо взять, чтобы при любой их расстановке на шахматной доске 8×8 некоторые три шашки обязательно образовывали прямоугольник 1×3? **(44. При диагональной раскраске в три цвета (рис.1) будет по 21 клетке первого и третьего цвета и 22 клетки второго цвета. Поэтому если шашек будет меньше 44, то их все можно поставить на клетки первого и второго цвета, а значит, никакие три из них не образуют прямоугольник 1×3, т.к. в таком прямоугольнике обязательно должны присутствовать по одной клетке каждого цвета. Если же будет 44 шашки, то рассмотрим разбиение доски на 21 прямоугольник 1×3 с одной свободной клеткой (рис.2), тогда по принципу Дирихле хотя бы 1 из этих прямоугольников будет полностью занят шашками, что нам и требуется.)**

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

рис.1

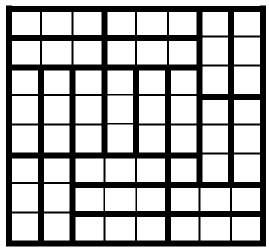
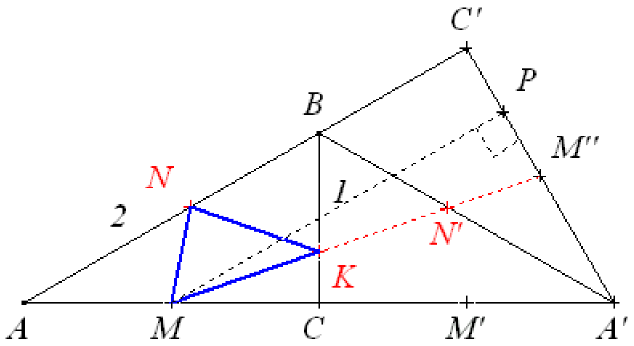


рис. 2

3. Назовём трёхзначное число *хребтовым*, если средняя цифра в его десятичной записи больше, чем крайние, и *овражным*, если его средняя цифра меньше крайних. Каких чисел и на сколько больше: хребтовых или овражных? **(Овражных чисел на 45 штук больше. Рассмотрим 3 случая наборов цифр $a \ge b \ge c$, при этом. все три цифры одновременно между собой не равны. 1) $a>b>c$. Тогда каждая такая тройка цифр даёт по 2 овражных $\overline{acb}, \overline{bca}$ и 2 хребтовых числа $\overline{cab}, \overline{bac}$ при $c \ne 0$. А при $c=0$ мы будем иметь $C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ дополнительных овражных числа (количество выборов 2 цифр (a и b) из 9 ненулевых), т.к. не будет хребтовых чисел вида $\overline{cab}$. 2) $a>b=c$. В этом случае не будет овражных чисел, но будет $C_9^2 = 36$ хребтовых чисел вида $\overline{bab}$ при $b \ne 0$. 3) $a=b>c$. В этом случае не будет хребтовых чисел, но будет $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ овражных чисел вида $\overline{aca}$. Тогда в сумме овражных больше на 45 штук.)**

4. $N\geq 3$ команд участвуют в футбольном турнире. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более, чем по одному разу, только "Металлург" и "Локомотив" сыграли дважды. При этом каждая команда сыграла хотя бы один матч. При каких N могло так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр? **(<u>При N, равных 3 и 4</u>. Для этих случаев легко строятся примеры. Если подобная ситуация могла возникнуть при $N\geq 5$, то команды должны были сыграть от 1 до N матчей (N–1 матч со всеми и один повторный матч между «Металлургом» и «Локомотивом»). Значит, должны встретиться все варианты от 1 до N, при этом вариант N должен быть у одной из двух упомянутых команд, с точностью до симметрии будем считать, что у «Металлурга». Тогда вариант N–1 должен быть у «Локомотива», иначе кроме «Металлурга» будет ещё одна команда, сыгравшая со всеми, т.е. каждая команда сыграла уже хотя бы по 2 матча (с «Металлургом» и «Спартаком»), а вариант 1 не встретится. Значит, вариант N–1 будет у «Локомотива», тогда вариант N–2≥3 будет у некоторой команды (назовём её «Спартак»). Вариант 1 будет у команды (назовём её «Динамо»), сыгравшей только с «Металлургом». Но тогда «Локомотив» и «Спартак» сыграли со всеми, кроме «Динамо». Значит, варианта 2 не будет, т.к. все остальные (исключая «Динамо») команды сыграли хотя бы три матча (с «Металлургом», «Локомотивом» и «Спартаком»). Противоречие.)**

5. M – середина катета AC, а точки N и K отмечены на гипотенузе AB=2 и катете BC=1. Какой наименьший периметр может иметь треугольник MNK? **($\frac{\sqrt{21}}{2}$. Заметим, что из условия следует, что наш прямоугольный треугольник ABC имеет углы $\angle A$=30° и $\angle B$=60°. Отразим треугольник сначала относительно прямой BC, затем треугольник BCA' относительно прямой BA'. Тогда периметр треугольника MNK выложится в виде ломаной $MKN'M''$ (см. чертёж), кратчайшая длина которой будет равна длине отрезка MM'', если точки K и N' попадут на него. Значит, нам надо найти расстояние между точками M и M'', которое можно найти по теореме косинусов из треугольника $MM''A'$, где $\angle MA'M''$=60°, $A'M''=AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A'M=3\cdot AM=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Тогда**



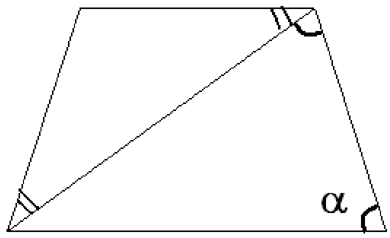
$$MM''=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

. Также этот отрезок можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника $MM''P$, где P – середина отрезка $M''C'$, $MP=\frac{3}{4}AC'=\frac{9}{4}$, $M''P=\frac{\sqrt{3}}{4}$, что следует из теоремы Фалеса.)

6. При скольких n из первой сотни произведение первых n натуральных чисел не делится на их сумму? **(<u>25 чисел</u>, когда (n+1) будет нечётным простым числом, не превосходящим 101, – 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,**

73, 79, 83, 89, 97, 101. В остальных случаях *n*! будет делиться на *n*(*n*+1)/2, т.е. 2(*n*-1)! разделится на составное (*n*+1).)

7. Найдите величину меньшего угла равнобочной трапеции, если диагональ делит её на два равнобедренных треугольника. (**<u>72°</u>. Пусть этот угол α, тогда в одном из полученных равнобедренных треугольников углы равны α, α и 180°-2α, а в другом – (180°-2α), (180°-2α) и (180°-α), откуда 180°=540°-5α.)**



8. На каком наибольшем количестве внутренних узлов шахматной доски 8×8 можно поставить запрещающий знак для прохода слона так, чтобы чернопольный слон смог всё же пройти с каждой чёрной клетки на каждую чёрную клетку? (**<u>18</u>. Чёрных клеток-вершин графа - 32, значит, надо оставить хотя бы 31 узел-ребро графа свободным (количество рёбер в связном графе должно быть не меньше, чем количество вершин минус 1). Всего 7·7=49 внутренних узлов, значит, запрещёнными для прохода могут быть не более 49-31=18 узлов. 18 узлов всегда можно удалить, чтобы образовалось остовное дерево-скелет нашего графа.)**

9. В однокруговом футбольном турнире участвовало 6 команд. Команды набрали соответственно 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очка. За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за проигрыш – 0. У какой из команд (и сколько) могло оказаться больше всего ничьих? **(<u>Либо 4 ничьи – у третьей команды, либо 3 ничьи – у пятой команды.</u> Всего команды набрали в сумме 40 очков в $C_6^2=\frac{6\cdot 5}{2}=15$ сыгранных матчах, а каждая ничья даёт потерю командами в сумме 1 очка из максимально возможных 3·15=45 очков. Значит, всего было 45–40=5 ничьих, а с учётом наличия ничьей сразу у двух команд всего было получено за ничьи 2·5=10 очков. Кроме того, количество ничьих у команды имеет при делении на 3 такой же остаток, что и количество очков, т.е. они сравнимы по модулю 3. Поэтому в сумме командами уже получены точно за ничьи 7 очков (по 1 очку – первая, вторая и третья команды (т.к. 13≡10≡7≡1(mod 3)), по 2 очка – четвёртая и шестая команды (т.к. 5≡2(mod 3)), и тогда ещё оставшиеся 3 очка получены одной командой. При этом первая и вторая команды сыграли ровно по одному матчу вничью, иначе, они набрали бы максимум 4·1+1·3=7 очков. У последней команды ровно 2 ничьи. Если бы у четвёртой команды было бы 5 ничьих, то это значит, что она сыграла вничью со всеми командами, в том числе и с пятой, у которой ничьих этом случае быть не должно. Значит, возможны два варианта: либо 4 ничьи – у третьей команды, либо 3 ничьи – у пятой команды. Для каждого из этих случаев существует турнир с подобным распределением очков.)**

10. В таблице 10×10 по порядку расставлены все натуральные числа от 1 до 100 (в первой строке – от 1 до 10, во второй строке – от 11 до 20 и т.д.). Затем перед каждым из чисел поставлен знак "+" или "–" так, что в каждой строке и каждом столбце оказалось по шесть знаков "+" и четыре знака "–". Чему может быть равна сумма всех чисел таблицы с учётом расставленных знаков? (**<u>1010</u>. Представим данную таблицу в виде суммы двух таблиц, разбив каждое её число на десятки и единицы (см. рис.). Сумма чисел первой таблицы**

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
70	70	70	70	70	70	70	70	70	70
80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

+

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

после расстановки знаков равна 2·(0+10+20+30+40+50+60+70+80+90)=900, так как в каждой её строке все числа равны, причём шесть их входят в сумму со знаком плюс, а четыре – со знаком минус. Аналогично, рассматривая столбцы вместо строк, получаем, что сумма всех чисел второй таблицы после расстановки знаков равна 2·(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)=110. Значит, сумма чисел исходной таблицы равна 900+110=1010.)

11. В некотором январе три воскресенья выпали на чётные дни. В каком следующем месяце такое могло быть? **(октябрь невисокосного года или апрель високосного года)**

12. Найдите все действительные числа x, целая часть которых является средним арифметическим самого числа и его дробной части. Целая часть числа $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x; дробная часть числа $\{x\}$ – это разность самого числа x и его целой части. **(<u>0 и 1,5</u>. Из условия следует, что $[x]=(x+\{x\})/2=([x]+2\{x\})/2$, значит, $[x]=2\{x\}$. Тогда $[x]$ равна 0 или 1, а $\{x\}$ соответственно равна 0 и 0,5.)**

13. Найдите большую сторону параллелограмма, если его высоты, проведённые к смежным сторонам, равны 2 и 3, а его периметр равен 9. **(<u>Такого параллелограмма не существует</u>. Каждая сторона не меньше высоты, проведённой к другой стороне, значит, периметр должен быть не меньше удвоенной суммы высот, т.е. 10, а у нас он равен 9.)**

14. На шахматную доску, первоначально пустую, по очереди ставятся кони по следующему правилу: если только что поставленный конь кого-то побил, то один из побитых им коней снимается с доски. Какое наибольшее количество коней можно поставить на доску с соблюдением данного правила? **(<u>62 коня</u>. За один ход либо число коней увеличивается на 1 за счёт нового коня, никого не бьющего, либо число фигур остаётся прежним. Т.к. наименьшее количество побитых конём клеток равно 2, то увеличение числа фигур не может происходить после того, как свободных клеток стало ровно 2, значит, всего коней не более 64-2=62. Рассмотрим граф ходов коня на шахматной доске, он связный и в нём есть гамильтонов путь, начинающийся в клетке a1, - см. рисунок. Тогда будем ставить каждого нового коня, начиная каждый раз с клетки a1, фактически передвигая этого коня по этому гамильтонову пути до нужной нам клетки.)**

40	27	60	9	38	25	54	7
61	16	39	26	59	8	37	24
28	41	10	15	46	55	6	53
17	62	47	56	13	58	23	36
42	29	14	11	48	45	52	5
63	18	31	44	57	12	35	22
30	43	2	49	20	33	4	51
1	64	19	32	3	50	21	34

к	к	к	к	к	к	к	к
к	к	к	к	к	к	к	к
к	к	к	к	к	к	к	к
к	к	к	к	к	к	к	к
к	к	к	к	к	к	к	к
к		к	к	к	к	к	к
к	к		к	к	к	к	к
к	к	к	к	к	к	к	к

15. Назовём два натуральных числа *двойниками*, если суммы их цифр равны друг другу и произведения их цифр также равны друг другу (например, 124 и 2212 – двойники). Найдите все числа, у которых нет двойников. **(<u>2 и числа из одинаковых цифр – единиц, троек, пятёрок или семёрок</u>)**

16. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC=1, а биссектриса прямого угла A перпендикулярна одной из медиан. Найдите площадь треугольника ABC. **(<u>1 или ¼</u>. Биссектриса не может быть перпендикулярна медиане, выходящей из той же вершины, иначе, угол треугольника будет больше 180°, поэтому разберём два других случая - медиан к AC и AB. В таком треугольнике один катет обязательно в 2 раза длиннее другого, поэтому площадь либо равна (1·2)/2, либо (1·1/2)/2.)**