XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VIII Турнир математических игр.

Математическая игра «Пенальти». ***<u>Старшая лига (10-11 классы).</u>*** **<u>Решения</u>**. ***18 сентября 2015 года***

1. На столе лежат n камней. Два игрока по очереди берут камни из кучи; каждый игрок при своём ходе может взять любое количество камней, являющееся квадратом натурального числа. Проигрывает тот, кто не может сходить. Найдите все n, не превосходящие 50, при которых второй игрок выиграет при правильной игре обоих. **(<u>2, 5, 7, 10, 12, 15, 17, 20, 22, 34, 39, 44</u>, что можно найти с помощью расстановки выигрышных и проигрышных позиций)**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	-

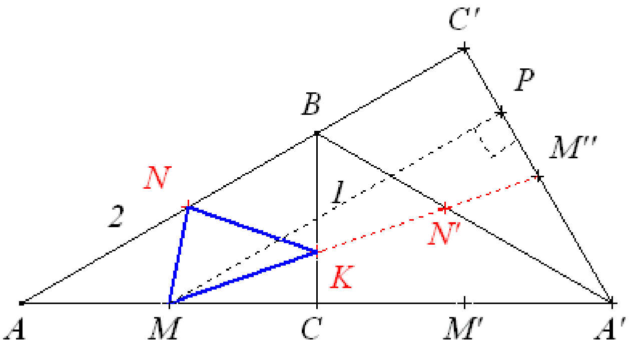
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-

2. Найдите корни уравнения $x^4+6x^3-7x^2-18x+12=0$ и запишите их в порядке возрастания. **(**$-3-\sqrt{13}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{13}-3$; $\sqrt{3}$. **Данный многочлен раскладывается на множители** $(x^2-3)(x^2+6x-4)=0$**, откуда уже и находим корни.)**

3. Назовём трёхзначное число *хребтовым*, если средняя цифра в его десятичной записи больше, чем крайние, и *овражным*, если его средняя цифра меньше крайних. Каких чисел и на сколько больше: хребтовых или овражных? **(<u>Овражных чисел на 45 штук больше</u>. Рассмотрим 3 случая наборов цифр $a\geq b\geq c$, при этом. все три цифры одновременно между собой не равны. 1) $a>b>c$. Тогда каждая такая тройка цифр даёт по 2 овражных** $\overline{acb}, \overline{bca}$ **и 2 хребтовых числа** $\overline{cab}, \overline{bac}$ **при $c\neq 0$. А при $c=0$ мы будем иметь** $C_9^2=\frac{9\cdot 8}{2}=36$ **дополнительных овражных числа (количество выборов 2 цифр (a и b) из 9 ненулевых), т.к. не будет хребтовых чисел вида** $\overline{cab}$ **. 2) $a>b=c$. В этом случае не будет овражных чисел, но будет** $C_9^2=36$ **хребтовых чисел вида** $\overline{bab}$ **при $b\neq 0$. 3) $a=b>c$. В этом случае не будет хребтовых чисел, но будет** $C_{10}^2=\frac{10\cdot 9}{2}=45$ **овражных чисел вида** $\overline{aca}$ **. Тогда в сумме овражных больше на 45 штук.)**

4. $N\geq 3$ команд участвуют в футбольном турнире. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более, чем по одному разу, только "Металлург" и "Локомотив" сыграли дважды. При этом каждая команда сыграла хотя бы один матч. При каких N могло так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр? **(<u>При N, равных 3 и 4</u>. Для этих случаев легко строятся примеры. Если подобная ситуация могла возникнуть при $N\geq 5$, то команды должны были сыграть от 1 до N матчей ($N-1$ матч со всеми и один повторный матч между «Металлургом» и «Локомотивом»). Значит, должны встретиться все варианты от 1 до N, при этом вариант N должен быть у одной из двух упомянутых команд, с точностью до симметрии будем считать, что у «Металлурга». Тогда вариант $N-1$ должен быть у «Локомотива», иначе кроме «Металлурга» будет ещё одна команда, сыгравшая со всеми, т.е. каждая команда сыграла уже хотя бы по 2 матча (с «Металлургом» и «Спартаком»), а вариант 1 не встретится. Значит, вариант $N-1$ будет у «Локомотива», тогда вариант $N-2\geq 3$ будет у некоторой команды (назовём её «Спартак»). Вариант 1 будет у команды (назовём её «Динамо»), сыгравшей только с «Металлургом». Но тогда «Локомотив» и «Спартак» сыграли со всеми, кроме «Динамо». Значит, варианта 2 не будет, т.к. все остальные (исключая «Динамо») команды сыграли хотя бы три матча (с «Металлургом», «Локомотивом» и «Спартаком»). Противоречие.)**

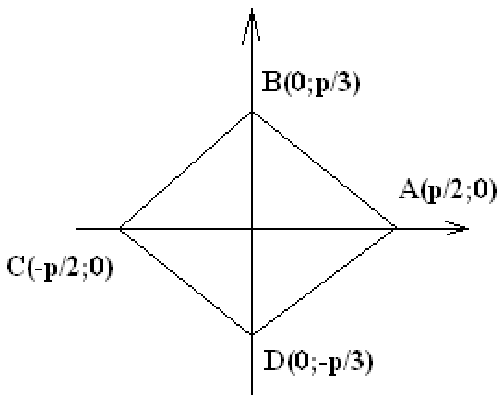
5. *M* – середина катета *AC*, а точки *N* и *K* отмечены на гипотенузе $AB=2$ и катете $BC=1$. Какой наименьший периметр может иметь треугольник *MNK*? **(**$\dfrac{\sqrt{21}}{2}$**. Заметим, что из условия следует, что наш прямоугольный треугольник *ABC* имеет углы $\angle A=30°$ и $\angle B=60°$. Отразим треугольник сначала относительно прямой *BC*, затем треугольник *BCA'* относительно прямой *BA'*. Тогда периметр треугольника *MNK* выложится в виде ломаной *MKN'M"* (см. чертёж), кратчайшая длина которой будет равна длине отрезка *MM"*, если точки *K* и *N'* попадут на него. Значит, нам надо найти расстояние между точками *M* и *M"*, которое можно найти по теореме косинусов из треугольника *MM"A'*, где $\angle MA'M''=60°$, $A'M''=AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $A'M=3\cdot AM=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Тогда**



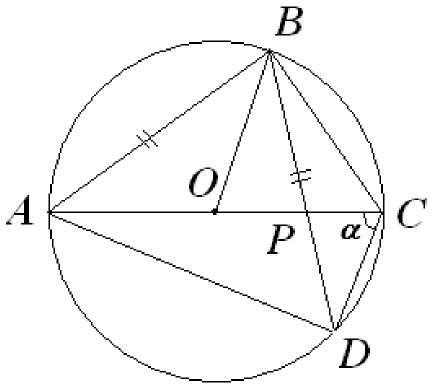
$$MM''=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 60°}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

. Также этот отрезок можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника *MM"P*, где *P* – середина отрезка *M"C'*, $MP=\dfrac{3}{4}AC'=\dfrac{9}{4}$, $M''P=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$**, что следует из теоремы Фалеса.)**

6. При скольких *n* из первой сотни произведение первых *n* натуральных чисел не делится на их сумму? **(<u>25 чисел</u>, когда (*n*+1) будет нечётным простым числом, не превосходящим 101, – 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101. В остальных случаях *n*! будет делиться на *n*(*n*+1)/2, т.е. 2(*n*-1)! разделится на составное (*n*+1).)**



7. При каких значениях *p* площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $2|x-1|+3|y+2|\le p$, больше 3 и меньше 27? **(<u>3<*p*<9</u>. Данное условие выполняется только при положительных *p* и задаёт на плоскости после сдвига начала координат в точку (1;–2) ромб с вершинами в точках *A*(*p*/2;0), *B*(0;*p*/3), *C*(-*p*/2;0), *D*(0;-*p*/3). Тогда площадь этого ромба равна $|AC|\cdot|BD|/2=p^2/3$ и требуемое ограничение на площадь выполняется при 3<*p*<9.)**



8. Четырёхугольник *ABCD* вписан в круг радиуса 5 так, что диагональ *AC* – диаметр круга. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке *P*. Известно, что $BD = AB$ и $PC = 2$. Найдите длину стороны *CD*. **(<u>10/3</u>. Пусть *O* – центр окружности, тогда $\alpha=\angle ACD=\angle ABD$, а $\angle BOC=2\angle BAC=2(90°-\angle ACB)=180°-2\angle ACB=180°-2\angle ADB=\angle ABD=\alpha$, следовательно, $\Delta OPB\sim\Delta CPD$, значит, $CP/CD=OP/OB$, откуда, $2/CD = 3/5$ и $CD=10/3$.)**

9. В однокруговом футбольном турнире участвовало 6 команд. Команды набрали соответственно 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очка. За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за проигрыш – 0. У какой из команд (и сколько) могло оказаться больше всего ничьих? **(<u>Либо 4 ничьи – у третьей команды, либо 3 ни-</u>**

<u>чьи – у пятой команды.</u> Всего команды набрали в сумме 40 очков в $C_6^2=\frac{6\cdot 5}{2}=15$ сыгранных матчах, а каждая ничья даёт потерю командами в сумме 1 очка из максимально возможных 3·15=45 очков. Значит, всего было 45–40=5 ничьих, а с учётом наличия ничьей сразу у двух команд всего было получено за ничьи 2·5=10 очков. Кроме того, количество ничьих у команды имеет при делении на 3 такой же остаток, что и количество очков, т.е. они сравнимы по модулю 3. Поэтому в сумме командами уже получены точно за ничьи 7 очков (по 1 очку – первая, вторая и третья команды (т.к. $13\equiv 10\equiv 7\equiv 1 \pmod 3$), по 2 очка – четвёртая и шестая команды (т.к. $5\equiv 2 \pmod 3$)), и тогда ещё оставшиеся 3 очка получены одной командой. При этом первая и вторая команды сыграли ровно по одному матчу вничью, иначе, они набрали бы максимум 4·1+1·3=7 очков. У последней команды ровно 2 ничьи. Если бы у четвёртой команды было бы 5 ничьих, то это значит, что она сыграла вничью со всеми командами, в том числе и с пятой, у которой ничьих этом случае быть не должно. Значит, возможны два варианта: либо 4 ничьи – у третьей команды, либо 3 ничьи – у пятой команды. Для каждого из этих случаев существует турнир с подобным распределением очков.)

10. В таблице 10×10 по порядку расставлены все натуральные числа от 1 до 100 (в первой строке – от 1 до 10, во второй строке – от 11 до 20 и т.д.). Затем перед каждым из чисел поставлен знак "+" или "–" так, что в каждой строке и каждом столбце оказалось по шесть знаков "+" и четыре знака "–". Чему может быть равна сумма всех чисел таблицы с учётом расставленных знаков? **(<u>1010</u>. Представим данную таблицу в виде суммы двух таблиц, разбив каждое её число на десятки и единицы (см. рис.).**

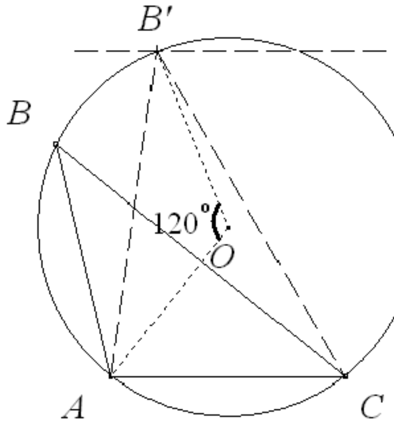
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
70	70	70	70	70	70	70	70	70	70
80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

+

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Сумма чисел первой таблицы после расстановки знаков равна 2·(0+10+20+30+40+50+60+70+80+90)=900, так как в каждой её строке все числа равны, причём шесть их входят в сумму со знаком плюс, а четыре – со знаком минус. Аналогично, рассматривая столбцы вместо строк, получаем, что сумма всех чисел второй таблицы после расстановки знаков равна 2·(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)=110. Значит, сумма чисел исходной таблицы равна 900+110=1010.)

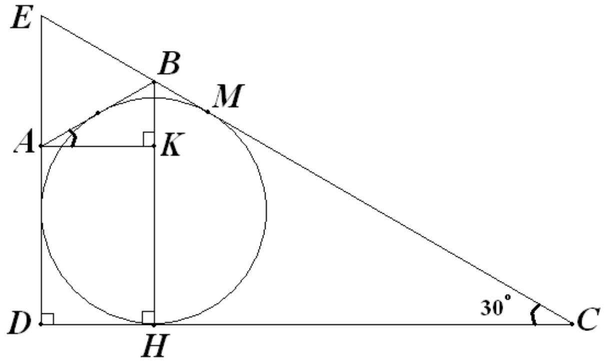
11. Координаты точек $A(a;\,b)$, $B(c;\,d)$, $C(e;\,f)$ удовлетворяют равенствам $a^2-4a+b^2-2b+2=0$, $c^2-4c+d^2-2d+2=0$, $e^2-4e+f^2-2f+2=0$. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник ABC? **($\frac{9\sqrt{3}}{4}$. Уравнение $x^2-4x+y^2-2y+2=0$ задаёт на координатной плоскости OXY окружность радиуса $\sqrt{3}$: $(x-2)^2+(y-1)^2=3$. Таким образом, точки $A(a,\ b)$, $B=(c,\ d)$, $C=(e,\ f)$ лежат на этой окружности, а наибольшую площадь среди всех вписанных в фиксированную окружность треугольников имеет равносторонний треугольник. Предположим противное. Пусть, например, $AB<BC$. Но тогда точку B можно немного сдвинуть по окружности (точка B’ на рисунке) так, что высота треугольника, опущенная на сторону AC, увеличится и, тем самым, увеличится площадь. Предложенным выше преобразованием, увеличивая площадь на каждом из двух возможных шагов, будем делать дуги равными 120° (для этого можно сближать между собой дуги, одна из которых меньше 120°, а другая – больше 120°, которые по принципу Дирихле существуют в случае неравностороннего треугольника). Таким обра-**



зом, максимум площади достигается при равностороннем треугольнике и станет равным $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. (*Фактически здесь мы пользуемся методом Штурма.*))

12. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $xyz + 2x + 3y + 6z = xy + 2xz + 3yz$? **(<u>10</u>. Уравнение равносильно следующему: $(x–3)(y–2)(z–1) = -6$. Десять решений последнего уравнения получаются из трёх возможных здесь разложений на целые множители числа (-6): $(-1)\times2\times3$, $(-2)\times1\times3$, $(-1)\times1\times6$.)**

13. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность. $\angle A=\angle B=120°$, $\angle D=90°$, $|BC|=1$. Найдите длину стороны AD. **($\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Из свойств данного четырёхугольника следует, что (см.рис.) *AD=KH=BH–BK=BC/2–AB/2=BC/2–BM=BC/2– (BC–MC)=HC–BC/2=BC·(cos30°–1/2)=*$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.)**



14. На шахматную доску, первоначально пустую, по очереди ставятся кони по следующему правилу: если только что поставленный конь кого-то побил, то один из побитых им коней снимается с доски. Какое наибольшее количество коней можно поставить на доску с соблюдением данного правила? **(<u>62 коня</u>. За один ход либо число коней увеличивается на 1 за счёт нового коня, никого не бьющего, либо число фигур остаётся прежним. Т.к. наименьшее количество побитых конём клеток равно 2, то увеличение числа фигур не может происходить после того, как свободных клеток стало ровно 2, значит, всего коней не более 64-2=62. Рассмотрим граф ходов коня на шахматной доске, он связный и в нём есть гамильтонов путь, начинающийся в клетке a1, - см. рисунок. Тогда будем ставить каждого нового коня, начиная каждый раз с клетки a1, фактически передвигая этого коня по этому гамильтонову пути до нужной нам клетки.)**

40	27	60	9	38	25	54	7
61	16	39	26	59	8	37	24
28	41	10	15	46	55	6	53
17	62	47	56	13	58	23	36
42	29	14	11	48	45	52	5
63	18	31	44	57	12	35	22
30	43	2	49	20	33	4	51
1	64	19	32	3	50	21	34

к	к	к	к	к	к	к	к
к	к	к	к	к	к	к	к
к	к	к	к	к	к	к	к
к	к	к	к	к	к	к	к
к	к	к	к	к	к	к	к
к		к	к	к	к	к	к
к	к		к	к	к	к	к
к	к	к	к	к	к	к	к

15. Назовём два различных натуральных числа *двойниками*, если суммы их цифр равны друг другу и произведения их цифр также равны друг другу (например, 124 и 2212 – двойники). Найдите все числа, у которых нет двойников. **(<u>2 и числа из одинаковых цифр – единиц, троек, пятёрок или семёрок</u>)**

16. Найдите сумму $\sin^3 18° + \sin^2 18°$. *(ответ дать в максимально упрощённом виде)* ($\frac{1}{8}$=0,125. $\sin^3 18° + \sin^2 18° = \sin^2 18°\cdot(\sin 18° + 1) = \sin^2 18°\cdot(\cos 72° + 1) = \frac{\sin^2 36°}{4\cos^2 18°}\cdot 2\cos^2 36° = \frac{4\sin^2 36°\cos^2 36°}{8\cos^2 18°} = \frac{\sin^2 72}{8\cos^2 18°} = \frac{1}{8}$.)