XII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
IX Турнир математических игр.
Математическая игра «Домино». ***Младшая лига (7-8 классы).*** **Решения**. ***10 сентября 2016 года***

0–0. Сколько различных слагаемых останется, если раскрыть скобки и привести подобные в следующем выражении $(1+x^2+x^4+\ldots+x^{200})^3+(1+x^3+x^6+\ldots+x^{300})^2$? (**401. При возведении в 3-ю степень первой суммы, т.е. при умножении трёх одинаковых скобок, мы можем получить только слагаемые со знаком «+» в чётных степенях от 0 до 600 (считаем, что 1=x^0), т.к., во-первых, степени были изначально только чётные, во-вторых, любая чётная степень этого промежутка 200*k*+2*n*, где *k*≤3 и *n*≤99 – целые неотрицательные числа, получится при взятии x^{200} из *k* скобок, x^{2n} из одной скобки, а из остальных скобок берём 1 (при этом всегда берём ровно 3 множителя). При возведении в квадрат второй суммы, т.е. при умножении двух одинаковых скобок, мы можем получить только слагаемые со знаком «+» в степенях от 0 до 600, кратных 3, (считаем, что 1=x^0), т.к., во-первых, степени были изначально только кратные 3, во-вторых, любая такая степень этого промежутка 300*k*+3*n*, где *k*≤2 и *n*≤99 – целые неотрицательные числа, получится при взятии x^{300} из *k* скобок, x^{3n} из одной скобки, остальное добираем 1 (при этом всегда берём ровно 2 множителя). При приведении подобных слагаемых все такие степени сохранятся, т.к. перед всеми слагаемыми был знак «+». Значит, нам надо посчитать суммарное количество чётных и нечётных кратных 3 чисел в промежутке от 0 до 600. Чётных чисел – 301, нечётных кратных 3 – 100 (ровно половина от кратных 3 в промежутке от 1 до 600). *Комментарий*: см. задачу 3 тура старт-лиги Южного математического турнира 2013 года.)**

0–1. Какую цифру нужно подставить вместо звездочки, чтобы число $\underbrace{11\ldots1}_{2015}\underbrace{22\ldots2}_{2016}*$ стало точным квадратом?

(**5, т.к. число $\underbrace{11\ldots1}_{n-1}\underbrace{22\ldots2}_{n}5$ является квадратом числа $\underbrace{33\ldots3}_{n-1}5$, что легко проверить в общем виде**

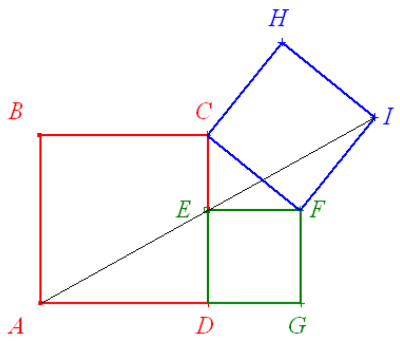
$$(\underbrace{33\ldots3}_{n-1}5)^2=\left(\frac{1}{3}(10^n+5)\right)^2=\frac{1}{9}(10^{2n}+10^{n+1}+25)=\frac{(10^{2n}-1)+(10^{n+1}-1)+27}{9}=$$
$$=\underbrace{11\ldots1}_{2n}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}+3=\underbrace{11\ldots1}_{n-1}\underbrace{22\ldots2}_{n}5.)$$

0–2. Известно, что $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$. Упростите дробь $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$. ($\frac{a}{c}$. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Leftrightarrow b^2=ac,\ a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$. **Тогда** $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2+ac}{ac+c^2}=\frac{a(a+c)}{c(a+c)}=\frac{a}{c}$. **Если** $a+c=0\Leftrightarrow a=-c\Rightarrow b^2=-c^2$. **Противоречие, т.к. эти числа не равны 0.)**

0–3. На шахматную доску 8×8 по одному выставляют слонов. Очередной выставляемый слон должен бить не более двух из ранее выставленных. Какое наибольшее число слонов можно выставить на доску? (**64. Если начнём выставлять слонов рядами слева направо сверху вниз, то каждый выставляемый слон бьёт не более двух слонов, стоящих выше него.)**

0–4. Решите ребус $\overline{aa}\cdot\overline{abc}\cdot\overline{bc}=\overline{abcabc}$ (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры). (**77·713·13=713713, т.к. после деления на $\overline{abc}$ получим, что $\overline{aa}\cdot\overline{bc}=1001=7\cdot 11\cdot 13$, откуда очевидным образом и находим решение ребуса)**

0–5. Каждое из 8 положительных чисел равно сумме квадратов остальных семи. Найдите все эти числа. (**Все числа равны 1/7. Как наибольшее, так и наименьшее из этих чисел равно сумме квадратов остальных семи, т.е. самое маленькое (положительное) число набора равно самой большой возможной сумме десяти квадратов, а самое большое (также положительное) число набора равно наименьшей возможной сумме десяти квадратов, значит, наибольшее число равно наименьшему, т.е. все числа равны между собой (пусть это будет число *x*). Тогда получаем уравнение *x*=7x^2, откуда с учётом положительности *x*=1/7.)**



0–6. *ABCD*, *DEFG*, *CFIH* – квадраты (см. рис.). Факт о том, что точка *E* – середина отрезка *AI*, можно доказать поворотами. Вставьте центры поворота и углы поворота в равенство $R\ \ (AE)=CG=R\ \ (IE)$.

($R_D^{-90^\circ}(AE)=CG=R_F^{90^\circ}(IE)$)

1–1. Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2015\cdot 2016}$. Ответ дать в виде несократимой дроби. $\left(\frac{2015}{2016}\right.$. **Воспользуемся справедливой при любом натуральном *n* формулой** $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. **Тогда** $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{2015\cdot2016}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)=1-\frac{1}{2016}=\frac{2015}{2016}$**.)**

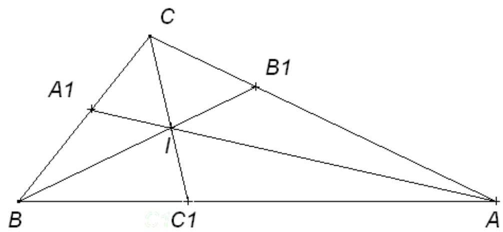
1–2. При скольких натуральных $n\geq2$ верно сравнение $20\equiv-16 \pmod n$? **(<u>8</u>. По определению сравнения натуральное число *n* должно быть делителем разности 20–(–16)=36=$2^2\cdot3^2$, которое имеет (2+1)(2+1)=9 натуральных делителей, один из которых (1) мы не должны учитывать.)**

1–3. Найдите остаток числа 13^{13} при делении на 30. **(<u>13</u>. Докажем, что $13^{13}\equiv13 \pmod{30}$, что равносильно тому, что $13^{13}-13=13\cdot(13^{12}-1)$ делится на 30=5·6. В силу взаимной простоты 5, 6 и 13 следует, что надо доказать делимость числа $13^{12}-1$ отдельно на 5 и 6, т.е. число 13^{12} сравнимо с 1 при делении и на 5, и на 6. Проверим это: $13^{12}\equiv(-2)^{12}\equiv4^6\equiv(-1)^6\equiv1 \pmod 5$ и $13^{12}\equiv1^{12}\equiv1 \pmod 6$.)**

1–4. Компьютерный вирус съедает пространство на жёстком диске. В первый день он уничтожил 1/2 ёмкости диска. Во второй – 1/3 от оставшегося, в третий день – 1/4 от остатка, на четвёртый день – 1/5 от остатка. Какая часть (в процентах) дискового пространства осталась несъеденной к началу пятого дня? **(На компьютере осталась $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ часть дискового пространства, или <u>20%</u>.)**

1–5. Если перевернуть лист, на котором написаны цифры, то цифры 0, 1, 8 не изменятся, 6 и 9 поменяются местами, остальные цифры потеряют смысл. Сколько существует девятизначных чисел, которые при переворачивании листа не изменяются? **(<u>1500 чисел</u>. В числе могут присутствовать только цифры 0, 1, 8, 6 и 9, при этом в силу симметрии достаточно задать только первые пять цифр числа. Первой может быть любая из этих цифр, кроме 0, для второй, третьей и четвёртой никаких иных ограничений нет, а средней (пятой) цифрой обязательно является 0, 1 или 8. Всего имеем 4·5·5·5·3 = 1500 чисел.)**

1–6. В треугольнике, углы которого относятся как 1:2:4, провели все биссектрисы. Сколько равнобедренных треугольников можно выделить на получившемся чертеже? **(<u>5</u> – треугольники A_1CI, B_1IC, BC_1C, AB_1B и C_1BI, в чём можно убедиться подсчётом углов, см. рис.)**



2–2. Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают её перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от одного из берегов, после чего продолжают движение, каждый доходит до противоположного берега и тут же плывёт обратно. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки? **(<u>1760 м</u>. Суммарное расстояние, пройденное паромами к моменту первой встречи, равно ширине реки, а расстояние, пройденное к моменту второй встречи, равно утроенной ширине реки. Следовательно, до второй встречи каждый из паромов прошел втрое большее расстояние, чем до первой встречи. Так как один из паромов до первой встречи прошёл 720 м, то до второй встречи он прошёл расстояние 720·3 = 2160 м. При этом он прошёл путь, равный ширине реки, и ещё 400 м. Следовательно, ширина реки равна 2160−400=1760 м.)**

2–3. Укажите все двузначные числа, кратные 10, которые могут быть числом диагоналей выпуклого многоугольника. **(<u>20 и 90</u>. Число диагоналей выпуклого *n*-угольника равно $n(n-3)/2$, т.к. каждая из *n* вершин соединена диагональю ровно с $(n-3)$ вершинами (кроме себя и двух соседних вершин). При этом каждую диагональ мы считаем дважды, значит, $n(n-3)$ надо разделить на 2. Тогда перебрав первые значения *n*, получим, что у четырёхугольника – 2 диагонали, у пятиугольника – 5, у шестиугольника – 9, далее: 14, 20, 27, 35, 44, 54, 65, 77, 90, 104, …, далее больше 100 диагоналей. Нам подходят только 20 и 90.)**

2–4. В параде участвовали менее 2016 солдат, ровно 1/99 из них награждена медалями. Всех солдат построили прямоугольником. Оказалось, что награждённые есть не менее чем в 44% шеренг и не менее чем в 44% колонн. Сколько всего солдат? **(<u>1980</u>. Пусть есть *r* награжденных, *m* шеренг и *n* колонн. Тогда всего солдат $99r=mn$. Так как $99r<2016$, то $r<2016/99=20^{36}/_{99}$, то есть $r\leq20$. Число награждённых не меньше числа колонн с награждёнными, то есть $r\geq0{,}44m$ и $r\geq0{,}44n$. Перемножив эти два неравенства, получим $r^2\geq0{,}44^2mn=0{,}44^2\cdot99r$, откуда $r\geq0{,}44^2\cdot99=19{,}1664$, то есть с учётом неравенства $r\leq20$ получим $r=20$. Значит, всего солдат 99·20=1980. *<u>Комментарий</u>*: см. аналогичную задачу 2 тура старт-лиги Южного математического турнира 2014 года.)**

			К		
	К				К
		К	К		
К				К	
		К			

2–5. Какое наименьшее количество коней можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый конь бил ровно трёх других коней? Приведите ответ и пример. **(<u>8, см.</u>**

рис. При шахматной раскраске доски каждый конь бьёт коней, стоящих на другом цвете. Значит, на каждом цвете должны стоять минимум по 3 коня. Но у коней, стоящих на одном цвете максимум по 2 коня, которых они могут бить одновременно. Значит, на каждом цвете не может стоять ровно по 3 коня, т.е. на каждом цвете минимум по 4 коня и всего не менее 8 коней.)

2–6. На каждой из граней двух игральных костей-кубиков надо записать по одному натуральному числу. После этого обе кости бросают, а числа на их верхних гранях складывают. Запишите числа на гранях так, чтобы с одинаковой ненулевой вероятностью получалась любая целая сумма от 2 до 13. **(Напишем на одной кости числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, на другой – 1, 1, 1, 7, 7, 7. Тогда вероятность “выпадения” каждой из указанных в условии сумм равна $\frac{1}{12}$.)**

3–3. Приведите пример таких целых чисел $a > b > 1$, что для каждого натурального числа k найдется такое натуральное число n, что $an+b$ является k-й степенью целого числа? *Ответ обосновать.* **(Например, a=6, b=3. 3^k при делении на 6 всегда даёт остаток 3.)**

3–4. Сторона AB треугольника ABC больше стороны AC, а $\angle A$=40°. Точка D лежит на стороне AB, причём $BD = AC$. Точки M и N — середины отрезков BC и AD соответственно. Найдите угол BNM. **(20°. *Решение 1:* Через точку C проведём прямую, параллельную MN, до пересечения с прямой AB в точке K (рис.1). Поскольку M — середина BC и $MN \parallel CK$, то отрезок MN — средняя линия треугольника BCK. Поэтому $KN = BN$, а т.к. N — середина AD, то $AK = BD = AC$. Значит, треугольник ACK — равнобедренный. $\angle BAC$ — внешний угол равнобедренного треугольника ACK, поэтому $\angle BNM = \angle BKC = \angle BAC$ = 20°. *Решение 2:* Через точку A проведём прямую, параллельную MN, до пересечения с прямой BC в точке E (рис.2). Докажем, что AE – биссектриса угла A, тогда $\angle BNM = \angle BAE$=40°/2=20°, что нам и надо получить. Введём обозначения, как на рис.2, $BC=a$, $AC=BD=b$, $EM=x$, $AN=ND=y$. Тогда из теоремы Фалеса и свойства ряда равных отношений следует, что: $\dfrac{\frac{a}{2}}{b+y}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{\frac{a}{2}+x}{(b+y)+y}=\dfrac{\frac{a}{2}-x}{(b+y)-y}$, т.е. $\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{CE}{AC}$ – выполняется признак биссектрисы, значит, AE – биссектриса $\angle A$, что нам и требуется доказать.)**

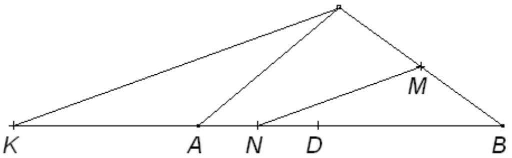


рис.1

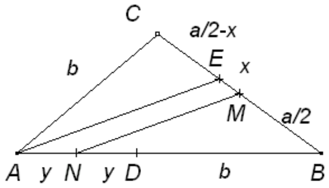


рис.2

3–5. 12 шахматистов сыграли однокруговой турнир. Оказалось, что все шахматисты набрали разное число очков и шахматист, занявший второе место, набрал не меньше очков, чем шахматисты, занявшие 5 последних мест, в сумме. Сколько очков могло оказаться у занявшего 7 место? (Победа – 1 очко, ничья – ½ очка, поражение – 0.) **(Или 5, или 5½, или 6 очков. Заметим, что в каждой партии разыгрывается одно очко. Поэтому уже в играх между собой шахматисты, занявшие последние 5 мест, вместе набрали не меньше очков, чем было сыграно между ними партий, то есть 5·4/2 = 10. Итак, второй призер набрал не менее 10 очков. Очевидно, больше 10 очков он также не мог набрать — ведь если он набрал хотя бы 10,5 очков, то он никому не проиграл, а победитель набрал 11 очков и у всех выиграл – противоречие. Поэтому второй призер набрал ровно 10 очков, и столько же очков набрали вместе игроки, занявшие последние 5 мест. Поскольку как раз 10 очков они набрали в играх между собой, то всем остальным участникам они только проигрывали, отдав им тем самым по 5 очков. Значит, можно убрать их пока из турнира и рассмотреть отдельный турнир на 7 лучших участников, где занявший 2-е место имеет ровно 5 очков, а 1-й либо 6, либо 5, 5 очков. Тогда остальным 5 участникам досталось 7·6/2 – 5 – 6 (или 5,5) очков, т.е. 10 или 10,5 очков, а худший из них (нужный нам в общем зачёте 7-й) набрал не более 1 очка, иначе они впятером набрали не менее 1½+2+2½+3+3½=12½ очков – противоречие. Значит, с учётом этого максимум 1 очка в играх с 6 лучшими и 5 побед в играх с 5 худшими занявший 7-е место набрал или 5, или 5½, или 6 очков. Причём все эти три варианта возможны в зависимости от распределения очков в играх между 7-ю лучшими.)**

3–6. Какое наибольшее количество слонов можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый слон бил не более одного слона? Приведите ответ и пример. **(20 слонов. Каждый слон бьёт 4 направления на граничные узлы, из которых максимум одно перекрыто другим слоном, значит, слон имеет хотя бы 3 своих направления. Всего существуют 60 направлений (4 – на угловые узлы и 2·28=56 – на граничные неугловые узлы). Тогда всего не более 60:3=20 слонов, пример расположения которых методом пропеллера см. на рис.)**

с		с				с	с
с			с		с		
	с						с
						с	
	с						
с						с	
		с		с			с
с	с				с		с

4–4. За круглым столом сидят $N \geq 6$ человек. При каких N они могут пересесть так, что любые два прежних соседа теперь будут сидеть через два человека? **(N не делится на 3. Если принять каждого человека за вершину графа, а ребром соединять вершины – бывшие соседи, то должен образоваться один цикл,**

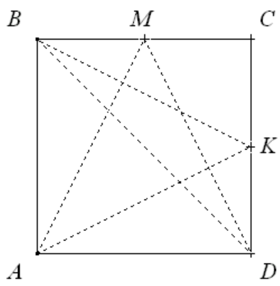
который был вначале. Но при новой посадке людей вершины идут через две, значит, длина цикла должна быть взаимно проста с 3.)

4–5. Рассмотрим всевозможные графики функций вида $y=kx+b$, где k и b – трехзначные числа. Какое наибольшее число таких графиков может пересекаться в одной точке? **(<u>900</u>, например, графики функций $y=kx+(1099–k)$ пересекаются в точке (1;1099), где k – любое трехзначное число. При любом фиксированном k прямые такого вида будут параллельны между собой, значит, для каждого возможного k (всего 900 вариантов) существует не более одной прямой, проходящей через некоторую общую точку нужного нам множества прямых, т.е. это множество содержит не более 900 прямых. *<u>Комментарий</u>*: см. также аналогичную задачу (про двузначные числа) 1 тура старт-лиги Южного математического турнира 2014 года.)**

4–6. Найдите все такие натуральные n, для которых $(n+6)(n+1200)$ – точный квадрат. **($n\in\{177602; 58800; 19202; 392\}$. Пусть $(n+6)(n+1200)=a^2$, $n+603=b\geq604$, тогда наше уравнение примет вид $(b–597)(b+597)=a^2$ и его надо решить в натуральных числах при условии $b\geq604$. Преобразуем уравнение к равносильному виду $b^2–597^2=a^2 \Leftrightarrow b^2–a^2=597^2 \Leftrightarrow (b–a)(b+a)=597^2=3^2\cdot199^2$, где скобки – натуральные числа и $b–a<b+a$, а 3 и 199 – простые числа. Тогда возможны следующие случаи: 1) $b–a=1$, $b+a=3^2\cdot199^2$; 2) $b–a=3$, $b+a=3\cdot199^2$; 3) $b–a=3^2$, $b+a=199^2$; 4) $b–a=199$, $b+a=3^2\cdot199$. Откуда находим $b\in\{178205; 59403; 19805; 995\}$, а затем $n\in\{177602; 58800; 19202; 392\}$. *<u>Комментарий</u>*: см. задачу 3 тура старт-лиги Южного математического турнира 2015 года.)**

5–5. На острове Невезения с населением 150 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге? **(<u>125</u>. Пусть n – число людей, вышедших на митинг. Рассмотрим общее число «недовольств». С одной стороны, каждой реформой недовольно ровно 75 жителей, а значит, общее число недовольств равно 75·5=375. С другой стороны, каждый вышедший на митинг (пусть их n человек) недоволен хотя бы тремя реформами. Следовательно, общее число недовольств не меньше, чем $3n$. Таким образом, $375\geq3n$, откуда $n\leq125$. Итак, искомое число не больше 125. Приведём пример, когда на площадь выйдет ровно 125 человек. Выберем среди жителей острова 125 человек и разобьём их на пять групп по 25 человек. Пусть против первой реформы возражают люди из первых трёх групп, против второй — люди из второй, третьей и четвёртой групп, против третьей — люди из третьей, четвёртой и пятой групп, против четвёртой — люди из четвёртой, пятой и первой групп, а против пятой — люди из пятой, первой и второй групп. Тогда против каждой реформы возражают ровно 3·25=75 человек, и на митинг выйдут выбранные 125 человек. Остальные же 25 человек всем довольны – правительство:☺.)**

5–6. Квадрат со стороной 1 раскрашен в два цвета. При каком наибольшем x гарантированно найдутся две одноцветные точки на расстоянии, не меньшем x? **($x=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Пусть точки M и K – середины соответственно сторон BC и CD квадрата $ABCD$ (см. рис.). Рассмотрим замкнутую ломаную $AMDBK$ из 5 звеньев. Т.к. вершин – нечётное число, то вершины этой ломаной не смогут чередоваться по цвету, значит, найдутся, две одноцветные точки – концы одного звена этой ломаной. Тогда расстояние между ними не меньше длины кратчайшего звена этой ломаной $\frac{\sqrt{5}}{2}$, т.к. $AM=MD=BK=KA=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $DB=\sqrt{2}$. Значит, при $x\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$ найдутся одноцветные точки на расстоянии, не меньшем x. Осталось построить пример, который показывает, что полученную оценку на x нельзя увеличить, – разобьём квадрат средней линией на два прямоугольника, один из которых полностью закрасим в чёрный цвет, а второй (без общей границы прямоугольников – средней линии квадрата) – в белый цвет. Тогда максимальное расстояние между точками одного цвета будет равно диаметру прямоугольника, т.е. длине диагонали прямоугольника $\frac{\sqrt{5}}{2}$. *<u>Комментарий</u>*: см. задачу 2 тура старт-лиги Южного математического турнира 2013 года.)**



6–6. Барон Мюнхгаузен как-то рассказывал, что ему удалось объехать квадратную страну, разбитую на нечётное число прямоугольных княжеств. При этом каждое княжество барон проехал ровно один раз и только по диагонали, и вернулся на то же место, откуда выехал. Приведите пример такой страны и его поездки. **(<u>На рис. приведён пример соответствующей страны, разбиение её на княжества и возможный маршрут Мюнхгаузена</u>. Маршрут указан пунктирной линией; в качестве точки старта годится любая точка маршрута.)**