XII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
IX Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль»**.** ***<u>Младшая лига (7-8 классы).</u>***
<u>Решения</u>. ***11 сентября 2016 года***

1. В трапеции *ABCD* точка *N* – середина боковой стороны *CD,* отрезки *AN* и *NB* перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника *ANB* равна *S*. **(<u>2*S*</u>. *<u>Комментарий</u>*. Условие перпендикулярности $AN \perp NB$ является излишним, но при этом условии задача допускает различные решения. *<u>Первое решение</u> (без использования условия* $AN \perp NB$*).* Проведем среднюю линию *MN* и подсчитаем площадь Δ *ABN* как сумму площадей Δ *AMN* и Δ *BMN* с общим основанием *MN* и равными высотами $\frac{h}{2}$ (где *h* – высота трапеции). Таким образом, $S = 2\left(\frac{1}{2}\cdot MN\cdot\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}MN\cdot h = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. *<u>Второе решение</u> (с использованием условия* $AN \perp NB$*).* В прямоугольном треугольнике *ABN* медиана *MN* равна половине гипотенузы *AB*. Поэтому в равнобедренном треугольнике *AMN* равны углы при основании, а значит, $\angle$ *MAN* = $\angle$ *MNA* = $\angle$ *NAD*. Таким образом, *N* лежит на биссектрисе угла *A* и поэтому высота в треугольнике *ABN*, опущенная из вершины *N*, равна $\frac{h}{2}$. В результате получим: $S = \frac{1}{2}AB\cdot h_{AB} = \frac{1}{2}\left(2MN\cdot\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.)**

2. $\tau(n)$ – количество всех положительных делителей натурального числа *n*. Приведите пример бесконечного множества таких *n*, что число $\frac{n}{\tau(n)}$ – целое. *Ответ обосновать.* **(Подходят все числа вида $n = 2^{p-1}\cdot p$, где *p* – нечётное простое число. Действительно, тогда $\tau(n) = 2p$.)**

3. Два пешехода вышли одновременно на рассвете: один из пункта *A* в пункт *B*, второй из пункта *B* в пункт *A* и шли равномерно. В 12 часов, в полдень, они встретились. В 16 часов того же дня первый пришёл в пункт *B*, а в 21 час того же дня второй прибыл в пункт *A*. В какое время в этот день был рассвет? **(<u>В 6 часов утра</u>. Пусть рассвет был в *x* часов, тогда до встречи первый пешеход шёл 12–*x* часов, в то время, как второй этот участок прошёл за 21–12=9 часов. Участок от места встречи до пункта *B* первый пешеход прошёл за 16−12 = 4 часа, а второй — за 12–*x* часов. Так как пешеходы шли равномерно, отношение времён, за которые они преодолевают один и тот же участок, есть величина постоянная, откуда $\frac{12-x}{9} = \frac{4}{12-x}$. Решая это уравнение, получаем: $(12 - x)^2 = 36 \Leftrightarrow |12-x| = 6 \Leftrightarrow x \in \{6; 18\}$. Так как рассвет был раньше полудня, то *x* =6.)**

4. Какое наибольшее количество ферзей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый ферзь бил не более четырёх других ферзей? Приведите ответ и пример. **(<u>22 ферзя – см.рис.2</u>. Ферзь бьёт 8 направлений (4 стенки и 4 граничных узла), при этом всего существуют 92 направления – 32 стенки, 4 угловых узла и по 2 направления на 28 граничных неугловых узла. У ферзя перекрыты другими ферзями максимум 4 из 8 направле-**

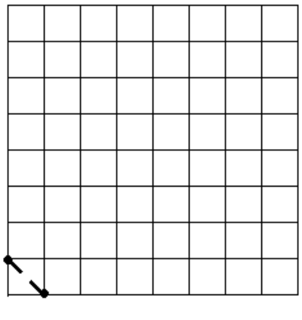
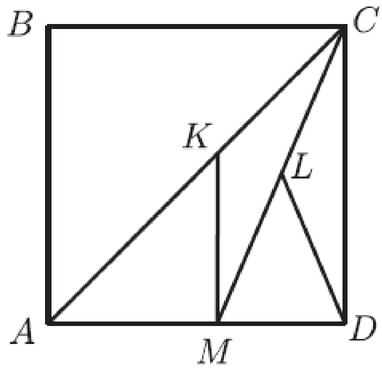


рис.1

ф	ф	ф	ф	ф	ф	ф	ф
ф							
ф							
ф							
ф							
ф							
ф							
ф	ф	ф	ф	ф	ф	ф	ф

рис.2

ний, значит, каждый ферзь имеет не менее 4 своих направлений из 92 возможных. Следовательно, всего не более [92:4]=23 ферзей. Если бы было ровно 23 ферзя, то не осталось бы свободных направлений и каждый ферзь бил бы ровно 4 направления. Но тогда обязательно занята каждая угловая клетка, иначе окажутся свободными оба направления на граничные неугловые узлы из угловой клетки (см. рис.1). Тогда ферзь в угловой клетке бьёт максимум трёх ферзей и для него свободными будут уже не менее 5 направлений (2 – на стенки и 3 – на граничные узлы своей клетки) – противоречие. Значит, ферзей не более 22.)



5. Покажите, как любой квадрат можно разрезать на не более чем 5 попарно различных равнобедренных треугольников. **(<u>Способ разрезания приведён на рисунке</u>. Здесь точка *K* выбрана на диагонали *AC* так, чтобы *KM*=*CK* (*KM* $\perp$ *AD*), точка *L* – середина *MC*. <u>*Комментарий*</u>: см. задачу 5 игры «Дуэль» младшей лиги со смены 2013 года.)**

6. Назовём натуральное число «*тройным*», если его десятичная запись состоит из трёх подряд идущих одинаковых групп цифр (например, 200420042004 или 777). После приписывания к некоторому «тройному» числу справа даты (по две цифры, означающие последовательно число, месяц и год, например, сегодня 11 сентября 2016 года дата записывается как 11.09.16), получилось новое «тройное число». Найдите все такие даты в XXI веке. **(<u>10.10.10, 11.11.11, 12.12.12</u>. Пусть** $A=\overline{a_1a_2...a_na_1a_2...a_na_1a_2...a_n}$ **– некоторое тройное число, к которому приписали дату** $b_1b_2.b_3b_4.b_5b_6$**, получив новое тройное число** $P=\overline{p_1p_2\cdots p_{n+2}p_1p_2\cdots p_{n+2}p_1p_2\cdots p_{n+2}}$**. Если** $n=1$**, то** $A=\overline{aaa}$**,** $P=\overline{aaaaaaaaa}$ **и искомая дата 11.11.11. Если** $n>1$**, то** $a_i=a_{i+n}$ **при** $1\le i\le n-2$**,** $a_{n-1}=a_1$ **и** $a_n=a_2$**. Если теперь** n **– нечётное число, то** $a_1=a_3=\ldots=a_n=a_2=\ldots=a_{n-1}$**, т.е. все цифры чисел** A **и** P **равны, новых дат в этом случае не возникает. Если** n **– чётно, то аналогичным рассуждением получаем** $A=\overline{abab...ab}$**, тогда** P **имеет такой же вид** $b_1b_2.b_3b_4.b_5b_6=ab.ab.ab$**, откуда (учитывая, что** $a\neq 0$**, а месяцев всего 12) находим, что** $a=1$**,** $b\le 2$**. Отсюда возникают ещё две даты: 10.10.10 и 12.12.12.)**

7. Число 1/97 представили в виде бесконечной десятичной дроби. Первую ненулевую цифру после запятой зачеркнули. Представьте получившееся число в виде правильной дроби. **(**$\frac{3}{970}$**. Эта дробь начинается с 0,0103. Произведённая операция означает, что мы умножили данное число на 10 и вычли 0,1, значит, получим** $\frac{10}{97}-\frac{1}{10}=\frac{100-97}{970}=\frac{3}{970}$**.)**

8. Какое наибольшее количество фишек (белых и чёрных) можно расставить на шахматной доске так, чтобы в каждой клетке стояло не более одной фишки и в каждой вертикали, горизонтали и диагонали стояло поровну белых и чёрных фишек? **(<u>48 фишек – по 24 белых и чёрных фишки</u> – см. пример, построенный методом «пропеллера». Заметим, что доска разбивается на 16 диагоналей с нечётным количеством клеток (в том числе, угловые клетки – диагонали с одной клеткой) – по 8 диаго-**

	б	б	б	ч	ч	ч	
ч		б	б	ч	ч		б
ч	ч		б	ч		б	б
ч	ч	ч			б	б	б
б	б	б			ч	ч	ч
б	б		ч	б		ч	ч
б		ч	ч	б	б		ч
	ч	ч	ч	б	б	б	

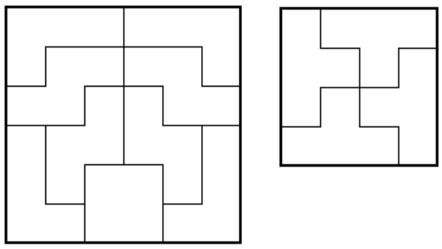
налей в каждом из двух направлений. Но на каждой такой диагонали должно стоять чётное количество фишек, т.к. белых и чёрных фишек должно быть поровну. Значит, на доске должно быть не менее 16 пустых клеток – хотя бы по одной на каждой из 16 выделенных нами диагоналей. Тогда занято фишками не более 48 клеток.)

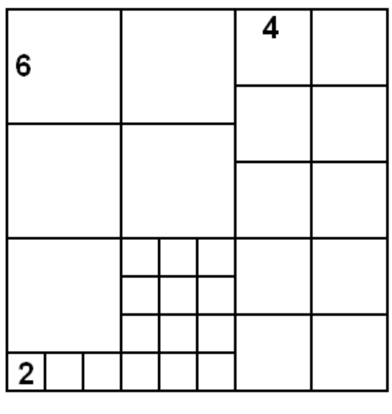
9. Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy+x+y=2016 \\ yz+y+z=2016 \\ zx+z+x=2016 \end{cases}$. **(*x*=*y*=*z*=** $\sqrt{2017}-1$ **и *x*=*y*=*z*=** $-1-\sqrt{2017}$**. Прибавим к каждому уравнению в обе части по единице и разложим левые части на множители. Получим, что (*x*+1)(*y*+1)=(*y*+1)(*z*+1)=(*z*+1)(*x*+1)=2017. Отсюда все выражения в скобках равны между собой и получим два случая – либо они равны** $\sqrt{2017}$**, либо они равны** $-\sqrt{2017}$**. Тогда в первом случае: *x*=*y*=*z*=**$\sqrt{2017}-1$**, а во втором: *x*=*y*=*z*=** $-1-\sqrt{2017}$**.)**

10. Рассмотрим множество всех натуральных чисел от 1 до 100. Назовём *мощным* число из этого множества, если оно является делителем суммы остальных чисел множества. Сколько всего мощных чисел? **(<u>6 чисел</u> – 1, 2, 5, 10, 25 и 50. Из условия следует, что мощное число также является делителем суммы S=1+2+3+…+100=101·100/2=50·101 всех чисел множества, т.е. является делителем числа 2·5²·101, входящим в интервал от 1 до 100.)**

11. Какое наибольшее количество точек можно разместить на плоскости так, чтобы для них выполнялось следующее условие: «если три точки являются вершинами треугольника, то этот треугольник – прямоугольный»? Приведите ответ и пример. **(<u>Бесконечно много, например, разместив все точки на одной прямой</u>.)**

12. Известно, что существуют 5 видов клетчатого тетрамино (квадрат 2×2, прямоугольник 1×4, четырёхклеточники в виде букв «Г», «Т» и «Z»). При каких *n* существуют квадратные клетчатые доски, которые можно полностью замостить (без перекрытия) комплектом, в котором каждое тетрамино встречается ровно по *n* раз? **(<u>*n*=20*k*², где *k* – любое натуральное число</u>. Заметим, что количество клеток всех фигурок 4·5*n* должно быть точным квадратом, значит, *n*=5*a*², где *a* – натуральное число. Тогда размер доски равен 10*a*×10*a*. При шахматной раскраске и чёрных, и белых клеток будет равное чётное количество (50*a*²). Но в фигурке «Т» будет нечётное количество клеток каждого цвета, а в остальных фигурках будет по 2 чёрных и белых клетки. Значит, количество фигурок «Т» должно быть чётным, т.е. *n*=5*a*² – чётное число, тогда *a*=2*k* – чётное число. Покажем теперь, что при чётном *a* мы всегда сможем замостить доску нужным количеством тетрамино. Для этого покажем, что сможем замостить квадрат 20×20 равным количеством фигурок, а уже такими квадратами замостим и наш квадрат. Напри-**





мер, квадрат 6×6 можно замостить 4 Z-тетрамино, 4 Г-тетрамино и 1 квадратом (см. рис.), квадрат 4×4 можно замостить и 4 Т-тетрамино (см. рис.), и 4 прямыми тетрамино 1×4. Соответственно квадрат 20×20 можно составить из 5 квадратов 6×6, 5 квадратов 4×4 из Т-тетрамино, 5 квадратов 4×4 из прямоугольников 1×4 и 15 квадратов 2×2, т.е. в квадрате 20×20 каждое тетрамино встретится по 20 раз.)

13. Найдите какой-нибудь простой делитель числа 253·283·309+140·166·196. *Ответ обосновать.* **(<u>449</u>. Заметим, что 253+196=283+166=309+40=449. Положим *x*=253, *y*=283, *z*=309, *a*=449, тогда число в условии равно *xyz*+(*a*−*x*)(*a*−*y*)(*a*−*z*), что после раскрытия скобок приводится к виду $a(a^2-a(x+y+x)+xy+xz+yz)$, т.е. делится на *a*=449. *<u>Примечание</u>*: число 449 – наименьший простой делитель указанного числа.)**

14. Найдите наименьшее натуральное число, записываемое только при помощи двоек, единиц и нулей, которое бы делилось на 225. **(<u>1222200</u>. Число должно делиться на 25, поэтому оно оканчивается не менее чем на два нуля. Число должно делиться на 9, поэтому сумма цифр должна делиться на 9, значит, она не менее 9. Представим 9 наименьшим числом слагаемых: 9=2+2+2+2+1. Чтобы число было меньше, 1 должна стоять в начале числа.)**

15. В остроугольном треугольнике *ABC* с целочисленными углами отметили центр описанной окружности *O*. Оказалось, что *∠AOB=60°*. Какие значения может принимать *∠ABC*, если известно, что он не меньше остальных углов треугольника *ABC*? **(<u>Все целые числа от 75° до 89°</u>. Заметим, что *OAB* – равнобедренный треугольник с углом 60°, т.е. равносторонний треугольник. Обозначим равные углы других равнобедренных треугольников *OBC*, *OCA* следующим образом: ∠*OAC*=∠*OCA*=α, ∠*OBC*=∠*OCB*=β. Тогда 2α+2β=180°−∠*OBA*−∠*OAB*=60°, значит, ∠*ACB*=α+β=30°. Получаем, что ∠*ABC* – наибольший угол треугольника *ABC* и не меньше (180°−30°)/2=75°. С учётом целочисленности углов и остроугольности треугольника, ∠*ABC* может принимать все целые значения от 75° до 89°.)**

16. Натуральные числа *a*, *b*, *c* таковы, что $\frac{abc+a+c}{bc+1}=\frac{2016}{1007}$. Найдите $\frac{abc+a+c}{ab+1}$.

($\frac{2016}{1007}$. Рассмотрим равенство $\frac{abc+a+c}{bc+1}=a+\frac{c}{bc+1}=\frac{2016}{1007}=2+\frac{2}{1007}$. Ясно, что первое слагаемое в этом равенстве больше единицы, а второе – меньше единицы. Но, поскольку каждое число представляется в таком виде единственным образом, то получаем $a=2,\ \frac{c}{bc+1}=\frac{2}{1007}\ \Rightarrow\ \frac{bc+1}{c}=\frac{1007}{2}\ \Rightarrow\ b+\frac{1}{c}=1003+\frac{1}{2}$. В силу той же единственности получаем $b=1003$, $c=2$. Значит, $a=c$ и $\frac{abc+a+c}{ba+1}=\frac{abc+a+c}{bc+1}=\frac{2016}{1007}$.)