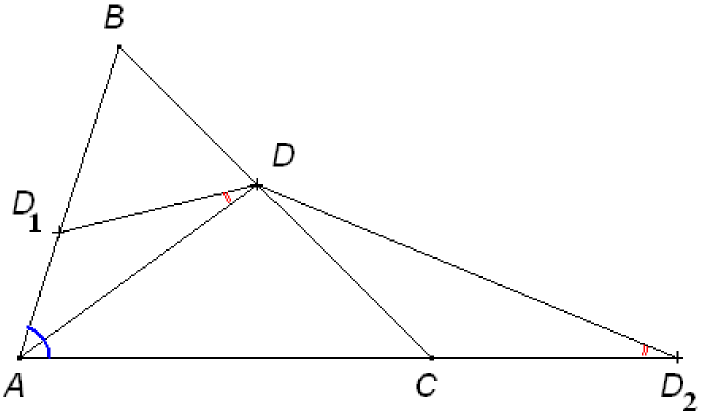
XII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
IX Турнир математических игр.

Математическая игра «Дуэль». ***<u>Старшая лига (9-11 классы).</u>***

<u>Решения</u>. *11 сентября 2016 года*

1. В треугольнике ABC, все стороны которого различны, биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $AB - BD = a$, $AC + CD = b$. Найдите AD.



($\sqrt{ab}$. Отложим на луче BA отрезок BD_1, равный BD, а на продолжении отрезка AC за точку C — отрезок CD_2, равный CD. Тогда $AD_1 = a$, $AD_2 = b$ и треугольники D_1BD и D_2CD — равнобедренные. Обозначим углы треугольника ABC через α, β и γ соответственно. Докажем, что треугольники AD_1D и ADD_2 подобны. Действительно, $\angle D_1AD = \angle DAD_2 = \alpha/2$, $\angle ADD_1 = \angle BD_1D - \angle BAD = 90° - \beta/2 - \alpha/2 = \gamma/2$, $\angle DD_2A = \angle DCA/2 = \gamma/2$. Отсюда следует подобие треугольников AD_1D и ADD_2. Следовательно, $\frac{AD_1}{AD} = \frac{AD}{AD_2}$. Отсюда находим, что $AD^2 = AD_1 \cdot AD_2 = ab$.)

2. $\tau(n)$ – количество всех положительных делителей натурального числа n. Приведите пример бесконечного множества таких n, что число $\frac{n}{\tau(n)}$ – целое. *Ответ обосновать.* **(Подходят все числа вида $n = 2^{p-1} \cdot p$, где p – нечётное простое число. Действительно, тогда $\tau(n) = 2p$.)**

3. Приведите пример кубического многочлена с целыми коэффициентами и единичным старшим коэффициентом, все значения которого в натуральных точках – нечётные составные числа. *Ответ обосновать.* **($x \cdot (x+1) \cdot (x+2)+3=x^3+3x^2+2x+3$. Произведение трёх подряд идущих множителей первого слагаемого при любом натуральном x будет натуральным чётным числом, кратным 3, а после прибавления 3 станет нечётным натуральным числом, кратным 3 и большим 3, т.е. составным.)**

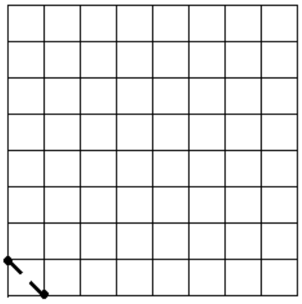
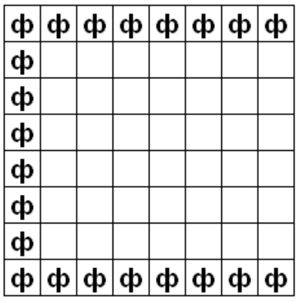


рис.1



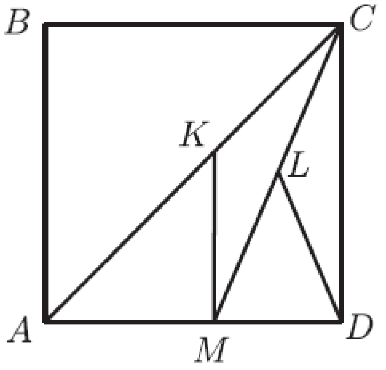
ф	ф	ф	ф	ф	ф	ф	ф
ф							
ф							
ф							
ф							
ф							
ф							
ф	ф	ф	ф	ф	ф	ф	ф

рис.2

4. Какое наибольшее количество ферзей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый ферзь бил не более четырёх других ферзей? Приведите ответ и пример. **(<u>22 ферзя – см.рис.2</u>. Ферзь бьёт 8 направлений (4 стенки и 4 граничных узла), при этом всего существуют 92 направления – 32 стенки, 4 угловых узла и по 2 направления на 28 граничных неугловых узла. У ферзя перекрыты другими ферзями максимум 4 из 8 направлений, значит, каждый ферзь имеет не менее 4 своих направлений из 92 возможных. Следовательно, всего не более [92:4]=23 ферзей. Если бы было ровно 23 ферзя, то не осталось бы свободных направлений и каждый ферзь бил бы ровно 4 направления. Но тогда обязательно занята каждая угловая клетка, иначе окажутся свободными оба направления на гранич-**

ные неугловые узлы из угловой клетки (см. рис.1). Тогда ферзь в угловой клетке бьёт максимум трёх ферзей и для него свободными будут уже не менее 5 направлений (2 – на стенки и 3 – на граничные узлы своей клетки) – противоречие. Значит, ферзей не более 22.)

5. Покажите, как любой квадрат можно разрезать на не более чем 5 попарно различных равнобедренных треугольников. **(Способ разрезания приведён на рисунке. Здесь точка *K* выбрана на диагонали *AC* так, чтобы *KM*=*CK* (*KM* $\perp$ *AD*), точка *L* – середина *MC*. *Комментарий*: см. задачу 5 игры «Дуэль» младшей лиги со смены 2013 года.)**



6. Назовём натуральное число «*тройным*», если его десятичная запись состоит из трёх подряд идущих одинаковых групп цифр (например, 200420042004 или 777). После приписывания к некоторому «тройному» числу справа даты (по две цифры, означающие последовательно число, месяц и год, например, сегодня 11 сентября 2016 года дата записывается как 11.09.16), получилось новое «тройное число». Найдите все такие даты в XXI веке. **(10.10.10, 11.11.11, 12.12.12. Пусть** $A=\overline{a_1a_2...a_na_1a_2...a_na_1a_2...a_n}$ **– некоторое тройное число, к которому приписали дату** $b_1b_2.b_3b_4.b_5b_6$**, получив новое тройное число** $P=\overline{p_1p_2\cdots p_{n+2}p_1p_2\cdots p_{n+2}p_1p_2\cdots p_{n+2}}$ **. Если *n*=1, то** $A=\overline{aaa}$**,** $P=\overline{aaaaaaaaa}$ **и искомая дата 11.11.11. Если *n*>1, то** $a_i = a_{i+n}$ **при** $1\leq i\leq n-2$**,** $a_{n-1}=a_1$ **и** $a_n=a_2$**. Если теперь *n* – нечётное число, то** $a_1=a_3=\ldots=a_n=a_2=\ldots=a_{n-1}$**, т.е. все цифры чисел *A* и *P* равны, новых дат в этом случае не возникает. Если *n* – чётно, то аналогичным рассуждением получаем** $A=\overline{abab...ab}$**, тогда *P* имеет такой же вид** $b_1b_2.b_3b_4.b_5b_6=ab.ab.ab$**, откуда (учитывая, что** $a\neq 0$**, а месяцев всего 12) находим, что** $a=1$**,** $b\leq 2$**. Отсюда возникают ещё две даты: 10.10.10 и 12.12.12.)**

7. Функция $f\colon N \to N$ такова, что $f(m-n+f(n)) = f(m)+f(n)$ при всех $m, n \in N$. Найдите $f(2016)$. **(4032. Подставив** $m = n$**, получим** $f(f(n)) = 2f(n)$**. Теперь подставим** $n = f(k)$ **и получим** $f(m+f(k)) = f(m-f(k)+f(f(k)) = f(m)+f(f(k))$**, то есть,** $f(m+n) = f(m)+f(n)$ **при условии, что что хотя бы одно из чисел *m* и *n* есть значение *f* от какого–то натурального числа. Теперь подставим** $m=n+1$ **и воспользуемся доказанным:** $f(n+1)+f(n) = f((n+1)-n+f(n)) = f(1+f(n)) = f(1)+f(f(n)) = f(1)+2f(n)$**, откуда** $f(n+1) = f(1)+f(n)$ **для всех натуральных *n*. Следовательно,** $f(n) = nf(1)$**, откуда при** $n = f(k)$ **имеем** $f(k)f(1) = f(f(k)) = 2f(k)$**. Таким образом,** $f(1) = 2$ **и** $f(n) = 2n$**. Нетрудно убедиться, что эта функция подходит.)**

8. Какое наибольшее количество фишек (белых и чёрных) можно расставить на шахматной доске так, чтобы в каждой клетке стояло не более одной фишки и в каждой вертикали, горизонтали и диагонали стояло поровну белых и чёрных фишек? Приведите ответ и пример. **(48 фишек – по 24 белых и чёрных фишки – см. пример, построенный методом «пропеллера». Заметим, что доска разбивается на 16 диагоналей с нечётным количеством клеток (в том числе, угловые клетки – диагонали с одной клеткой) – по 8 диагоналей в каждом из двух направлений. Но на каждой такой диагонали должно стоять чётное количество фишек, т.к. белых и чёрных фишек должно быть поров-**

	б	б	б	ч	ч	ч	
ч		б	б	ч	ч		б
ч	ч		б	ч		б	б
ч	ч	ч			б	б	б
б	б	б			ч	ч	ч
б	б		ч	б		ч	ч
б		ч	ч	б	б		ч
	ч	ч	ч	б	б	б	

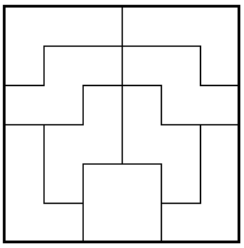
ну. Значит, на доске должно быть не менее 16 пустых клеток – хотя бы по одной на каждой из 16 выделенных нами диагоналей. Тогда занято фишками не более 48 клеток.)

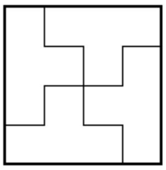
9. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 4$ и $BC = 1$ пересекаются в точке O. Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O, а прямой AD – в точках A и D соответственно. Найдите AK^2+DL^2. (**20**)

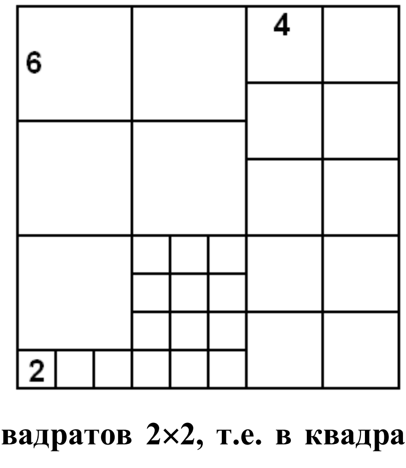
10. Натуральные числа от 1 до 2^{20} красят в синий и зеленый цвета так, чтобы из любых двух различных чисел $a, b \le 2^{20}$, сумма которых равняется степени двойки, ровно одно было зелёным. Сколькими способами это можно сделать? (**2^{21}. Можно показать, что в графе сумм, где ребром соединяем числа, дающие в сумме степень двойки, образуется 21 компонента связности. В каждую компоненту связности входят числа, у которых одинаковая степень вхождения двойки в разложения на простые множители: нечётные числа; чётные, не кратные 4; кратные 4, но кратные 8; и т.д.; $\{2^{18};3\cdot2^{18}\}$, $\{2^{19}\}$, $\{2^{20}\}$. При этом каждая компонента связности окажется деревом, что можно показать методом спуска от висячих вершин каждой компоненты связности с постепенным движением к вершине 2^n, фактически рассуждая только на множестве нечётных чисел, двигаясь от висячих вершин к 1. Но дерево является двудольным графом, значит, у каждой компоненты связности будет два способа раскраски вершин в шахматном порядке синим и зелёным цветом. Значит, всего получится 2^{21} способов раскрасить наше множество.)**

11. Какое наибольшее количество точек можно разместить на плоскости так, чтобы для них выполнялось следующее условие: «если три точки являются вершинами треугольника, то этот треугольник – прямоугольный»? Приведите ответ и пример. (**Бесконечно много, например, разместив все точки на одной прямой.**)

12. Известно, что существуют 5 видов клетчатого тетрамино (квадрат 2×2, прямоугольник 1×4, четырёхклеточники в виде букв «Г», «Т» и «Z»). При каких n существуют квадратные клетчатые доски, которые можно полностью замостить (без перекрытия) комплектом, в котором каждое тетрамино встречается ровно по n раз? (**$n=20k^2$, где k – любое натуральное число. Заметим, что количество клеток всех фигурок $4\cdot5n$ должно быть точным квадратом, значит, $n=5a^2$, где a – натуральное число. Тогда размер доски равен $10a\times10a$. При шахматной раскраске и чёрных, и белых клеток будет равное чётное количество ($50a^2$). Но в фигурке «Т» будет нечётное количество клеток каждого цвета, а в остальных фигурках будет по 2 чёрных и белых клетки. Значит, количество фигурок «Т» должно быть чётным, т.е. $n=5a^2$ – чётное число, тогда $a=2k$ – чётное число. Покажем теперь, что при чётном a мы всегда сможем замостить доску нужным количеством тетрамино. Для этого покажем, что сможем замостить квадрат 20×20 равным количеством фигурок, а уже такими квадратами замостим и наш квадрат. Например, квадрат 6×6 можно замостить 4 Z-тетрамино, 4 Г-тетрамино и 1 квадратом (см. рис.), квадрат 4×4 можно замостить и 4 Т-тетрамино (см. рис.), и 4 прямыми тетрамино 1×4. Соответственно квадрат 20×20 можно составить из 5 квадратов 6×6, 5 квадратов 4×4 из Т-тетрамино, 5 квадратов 4×4 из прямоугольников 1×4 и 15 квадратов 2×2, т.е. в квадрате 20×20 каждое тетрамино встретится по 20 раз.)**



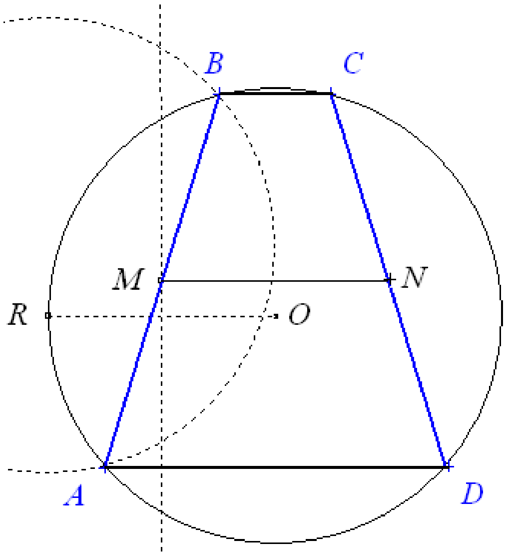




13. Найдите какой-нибудь простой делитель числа 253·283·309+140·166·196. *Ответ обосновать.* (**449. Заметим, что 253+196=283+166=309+40=449. Положим x=253, y=283, z=309,**

$a=449$, тогда число в условии равно $xyz+(a-x)(a-y)(a-z)$, что после раскрытия скобок приводится к виду $a(a^2-a(x+y+x)+xy+xz+yz)$, т.е. делится на $a=449$. *Примечание*: число 449 – наименьший простой делитель указанного числа.)

14. Какие значения может принимать угол при основании вписанной в окружность трапеции, средняя линия которой равна радиусу этой окружности? **($30° < \alpha < 150°$ и α не равен 45°, 90° и 135°. Будем строить нашу равнобедренную трапецию методом «идеального» построения (см. чертёж). Тогда точка M – середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$ – будет двигаться по прямой, являющейся серединным перпендикуляром к некоторому радиусу OR, параллельному стороне AD. Двигая точку M по этому серединному перпендикуляру в пределах окружности получим, что по непрерывности $\angle BAD=\alpha$ будет меняться в пределах от 30° (точка A совпадёт с B и прямая AB будет стремиться к касательной) до 150° (аналогичная ситуация на другом конце рассматриваемого отрезка). Но возникнут также особые случаи: 1) $\alpha=45°$, когда точка A совпадёт с R, $B=C$, получится равнобедренный треугольник; 2) $\alpha=135°$, когда точка B совпадёт с R, $A=D$, также получится равнобедренный треугольник; 3) при попадании M на OR возникнет случай прямоугольника ($\alpha=90°$), который по определению не является трапецией. *Комментарий*: см. задачу 14 игры «Дуэль» со смены 2013 года. Её тогда не решила ни одна команда.)**



15. Найдите какую-нибудь тройку различных чисел *a*, *b* и *c*, для которых выполняется равенство $a - b^3 = b - c^3 = c - a^3$. *Пример обосновать.* **(Таких троек нет, т.к. обязательно $a=b=c$. Условие равносильно системе трёх уравнений: $a-c=(b-a)(b^2+ab+a^2)$, $a-b=(b-c)(b^2+bc+c^2)$, $b-c=(c-a)(c^2+ac+a^2)$. Неполный квадрат суммы: 1) либо равен нулю, если числа равны 0, тогда автоматически и третье число будет равно одному из этих двух, т.е. все числа будут равны 0; 2) либо строго положителен, отсюда следует, что три выражения $a-c$, $b-a$ и $c-b$ одного знака. Но сумма этих выражений равна нулю, значит, все они равны нулю, как следствие, все три числа a, b, c равны между собой.)**

16. Василий Васильевич, вспомнил, как в студенческие времена взяв менее 100 рублей, пошел гулять. Заходя в какой-нибудь магазин и имея при этом *m* рублей *n* копеек, он тратил *n* рублей *m* копеек. Какое наибольшее число магазинов смог посетить студент Вася? **(6 магазинов. Пусть при входе в первый магазин Вася имел a рублей b копеек. Ясно, что $b \le a$. Тогда при выходе он будет иметь $a-b-1$ рублей и $b-a+100$ копеек. Пусть $a-b = t \le 99$. Итак, у Васи сейчас $t - 1$ рубль $100 - t$ копеек. Условие возможности посещения второго магазина: $t - 1 \ge 100 - t$, или $t > 51$, т.к. t – целое. После посещения второго магазина у Васи $2t - 102$ рублей и $201 - 2t$ копеек, чтобы можно было посетить третий, необходимо и достаточно, чтобы $t \ge 76$. Аналогично, чтобы посетить четвёртый магазин, необходимо и достаточно, чтобы $t \ge 89$, чтобы пятый – $t \ge 95$, чтобы шестой – $t \ge 98$, а чтобы седьмой – t должно быть больше, чем 99. Последнее невозможно, а предыдущее неравенство выполнимо, например, если Вася имел изначально 99 рублей 00 копеек. Проследим за состоянием кошелька в этом случае. После первого магазина остаётся 98 руб 01 коп, после второго – 96 руб 03 коп, после третьего – 92 руб 07 коп, после четвёртого – 84 руб 15 коп, после пятого – 68 руб 31 коп, после шестого – 36 руб 63 коп, в седьмом магазине расплатиться уже не удастся. *Комментарий*: см. задачу 8 игры «Дуэль» со смены 2013 года.)**