XII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». IX Турнир математических игр.

Математическая игра «Дуэль». ***Младшая лига (7-8 классы).*** ***11 сентября 2016 года***

1. В трапеции $ABCD$ точка N – середина боковой стороны CD, отрезки AN и NB перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника ANB равна S.

2. $\tau(n)$ – количество всех положительных делителей натурального числа n. Приведите пример бесконечного множества таких n, что число $\frac{n}{\tau(n)}$ – целое. *Ответ обосновать.*

3. Два пешехода вышли одновременно на рассвете: один из пункта A в пункт B, второй из пункта B в пункт A и шли равномерно. В 12 часов, в полдень, они встретились. В 16 часов того же дня первый пришёл в пункт B, а в 21 час того же дня второй прибыл в пункт A. В какое время в этот день был рассвет?

4. Какое наибольшее количество ферзей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый ферзь бил не более четырёх других ферзей? Приведите ответ и пример.

5. Покажите, как любой квадрат можно разрезать на не более чем 5 попарно различных равнобедренных треугольников.

6. Назовём натуральное число «*тройным*», если его десятичная запись состоит из трёх подряд идущих одинаковых групп цифр (например, 200420042004 или 777). После приписывания к некоторому «тройному» числу справа даты (по две цифры, означающие последовательно число, месяц и год, например, сегодня 11 сентября 2016 года дата записывается как 11.09.16), получилось новое «тройное число». Найдите все такие даты в XXI веке.

7. Число 1/97 представили в виде бесконечной десятичной дроби. Первую ненулевую цифру после запятой зачеркнули. Представьте получившееся число в виде правильной дроби.

8. Какое наибольшее количество фишек (белых и чёрных) можно расставить на шахматной доске так, чтобы в каждой клетке стояло не более одной фишки и в каждой вертикали, горизонтали и диагонали стояло поровну белых и чёрных фишек? Приведите ответ и пример.

9. Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy+x+y=2016 \\ yz+y+z=2016 \\ zx+z+x=2016 \end{cases}$.

10. Рассмотрим множество всех натуральных чисел от 1 до 100. Назовём *мощным* число из этого множества, если оно является делителем суммы остальных чисел множества. Сколько всего мощных чисел?

11. Какое наибольшее количество точек можно разместить на плоскости так, чтобы для них выполнялось следующее условие: «если три точки являются вершинами треугольника, то этот треугольник – прямоугольный»? Приведите ответ и пример.

12. Известно, что существуют 5 видов клетчатого тетрамино (квадрат 2×2, прямоугольник 1×4, четырёхклеточники в виде букв «Г», «Т» и «Z»). При каких n существуют квадратные клетчатые доски, которые можно полностью замостить (без перекрытия) комплектом, в котором каждое тетрамино встречается ровно по n раз?

13. Найдите какой-нибудь простой делитель числа $253\cdot283\cdot309+140\cdot166\cdot196$. *Ответ обосновать.*

14. Найдите наименьшее натуральное число, записываемое только при помощи двоек, единиц и нулей, которое бы делилось на 225.

15. В остроугольном треугольнике ABC с целочисленными углами отметили центр описанной окружности O. Оказалось, что $\angle AOB=60°$. Какие значения может принимать $\angle ABC$, если известно, что он не меньше остальных углов треугольника ABC?

16. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{abc+a+c}{bc+1}=\frac{2016}{1007}$. Найдите $\frac{abc+a+c}{ab+1}$.