XII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». IX Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль». ***Старшая лига (9-11 классы).*** **11 сентября 2016 года**

1. В треугольнике ABC, все стороны которого различны, биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $AB - BD = a$, $AC + CD = b$. Найдите AD.

2. $\tau(n)$ – количество всех положительных делителей натурального числа n. Приведите пример бесконечного множества таких n, что число $\dfrac{n}{\tau(n)}$ – целое. *Ответ обосновать.*

3. Приведите пример кубического многочлена с целыми коэффициентами и единичным старшим коэффициентом, все значения которого в натуральных точках – нечётные составные числа. *Ответ обосновать.*

4. Какое наибольшее количество ферзей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый ферзь бил не более четырёх других ферзей? Приведите ответ и пример.

5. Покажите, как любой квадрат можно разрезать на не более чем 5 попарно различных равнобедренных треугольников.

6. Назовём натуральное число «*тройным*», если его десятичная запись состоит из трёх подряд идущих одинаковых групп цифр (например, 200420042004 или 777). После приписывания к некоторому «тройному» числу справа даты (по две цифры, означающие последовательно число, месяц и год, например, сегодня 11 сентября 2016 года дата записывается как 11.09.16), получилось новое «тройное число». Найдите все такие даты в XXI веке.

7. Функция $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такова, что $f(m-n+f(n)) = f(m)+f(n)$ при всех $m, n \in \mathbf{N}$. Найдите $f(2016)$.

8. Какое наибольшее количество фишек (белых и чёрных) можно расставить на шахматной доске так, чтобы в каждой клетке стояло не более одной фишки и в каждой вертикали, горизонтали и диагонали стояло поровну белых и чёрных фишек? Приведите ответ и пример.

9. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 4$ и $BC = 1$ пересекаются в точке O. Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O, а прямой AD – в точках A и D соответственно. Найдите AK^2+DL^2.

10. Натуральные числа от 1 до 2^{20} красят в синий и зеленый цвета так, чтобы из любых двух различных чисел $a, b \le 2^{20}$, сумма которых равняется степени двойки, ровно одно было зелёным. Сколькими способами это можно сделать?

11. Какое наибольшее количество точек можно разместить на плоскости так, чтобы для них выполнялось следующее условие: «если три точки являются вершинами треугольника, то этот треугольник – прямоугольный»? Приведите ответ и пример.

12. Известно, что существуют 5 видов клетчатого тетрамино (квадрат 2×2, прямоугольник 1×4, четырёхклеточники в виде букв «Г», «Т» и «Z»). При каких n существуют квадратные клетчатые доски, которые можно полностью замостить (без перекрытия) комплектом, в котором каждое тетрамино встречается ровно по n раз?

13. Найдите какой-нибудь простой делитель числа $253\cdot283\cdot309+140\cdot166\cdot196$. *Ответ обосновать.*

14. Какие значения может принимать угол при основании вписанной в окружность трапеции, средняя линия которой равна радиусу этой окружности?

15. Найдите какую-нибудь тройку различных чисел a, b и c, для которых выполняется равенство $a - b^3 = b - c^3 = c - a^3$. *Ответ обосновать.*

16. Василий Васильевич, вспомнил, как в студенческие времена взяв менее 100 рублей, пошел гулять. Заходя в какой-нибудь магазин и имея при этом m рублей n копеек, он тратил n рублей m копеек. Какое наибольшее число магазинов смог посетить студент Вася?