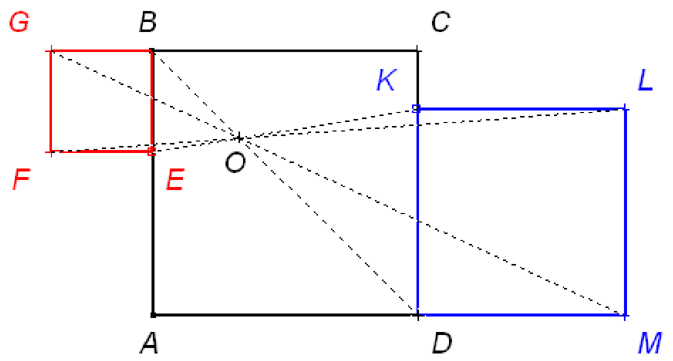
XII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
IX Турнир математических игр. Математическая игра «Пенальти».
Младшая лига (7-8 классы). Решения. 12 сентября 2016 года

1. Найдите все делящиеся на 37 пятизначные числа, у которых первая, третья и пятая цифры одинаковы. **(Все числа вида: X0X0X, X4X7X и X7X3X, где X — произвольная цифра. Заметим, что число 10101 делится на 37, поэтому 1000*a*+10*b* должно делиться на 37 (*a* — количество тысяч, а *b* — количество десятков в пятизначном числе). Это равносильно делимости на 37 числа 100*a*+*b* или 26*a*+*b*. Подставляя вместо *a* всевозможные значения от 0 до 9, находим соответствующие *b*. В диапазоне от 0 до 9 получаются три значения: *a* = *b* = 0, *a* =4, *b* = 7, *a* =7, *b* = 3.)**

2. На сторонах *AB* и *CD* единичного квадрата *ABCD* взяты точки *E* и *K* соответственно, а во внешнюю сторону построены квадраты *BEFG* и *DKLM* со сторонами *a* и *b* соответственно ($a<1$, $b<1$). Оказалось, что отрезки *EK*, *FL* и *GM* пересеклись в одной точке. При каких значениях отношения *a*:*b* такое возможно? **(При любом положительном значении, что следует из гомотетии квадратов *BEFG* и *DKLM* с любыми возможными вариантами сторон относительно точки *O* пересечения отрезков *EK* и *BD*.)**



3. Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно, с одного места и в одном направлении. Они бегут с постоянными скоростями. Иванов впервые обогнал Петрова через 3 минуты, а Петров впервые обогнал Сидорова через 6 минут. Через сколько минут Иванов впервые обогнал Сидорова? **(Через 2 минуты. Когда один бегун впервые обгоняет другого, это означает, что тот, кто обгоняет, пробежал ровно на круг больше. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Петрова на 1/3 круга, а Петров каждую минуту обгоняет Сидорова на 1/6 круга. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Сидорова на 1/3+1/6 = 1/2 часть круга, и обгонит его на круг через 2 минуты.)**

4. Какое наибольшее количество коней можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый конь бил ровно одного коня? Приведите ответ и пример. **(32 коня. Разобьём всю доску на 4 квадрата 4×4, каждый из которых разобьём на 4 цикла из 4 клеток (см. рис.). В каждом из этих 16 циклов не более двух коней, иначе найдётся конь, бьющий не менее двух других коней, значит, всего не более 2·16=32 коней, пример расстановки которых методом пропеллера см. на рис.)**

1	3	4	2
4	2	1	3
3	1	2	4
2	4	3	1

К	К	К	К			К	К
К	К	К	К			К	К
						К	К
						К	К
К	К						
К	К						
К	К			К	К	К	К
К	К			К	К	К	К

5. Найдите НОД множества всех чисел вида $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ при всех нечётных *n*. **(2^9=512. $n^{12}-n^8-n^4+1=(n^8-1)(n^4-1)=(n^4-1)^2(n^4+1)=$ $(n^2-1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)$. Число n^2-1 делится на 8, как произведение двух последовательных чётных чисел. Остальные множители чётны, поэтому произведение всегда делится на $8^2\cdot2^3=2^9$. Но при этом при *n*=3 мы получим $8^2\cdot10^2\cdot82=2^9\cdot5^2\cdot41$, значит, больше, чем на девятую степень двойки, делимости не будет. При *n*=5 мы получим $24^2\cdot26^2\cdot626$ – число, не делящееся на 5 и 41, значит, НОД получающихся чисел равен 2^9.)**

6. На клетке *a*1 шахматной доски стоит слон. В следующий раз он оказался в исходной клетке, сделав 4 хода. Сколькими способами он мог это сделать? **(276 способов. Маршрут слона возможен двух видов. 1) Дойти за два хода до клетки (24 таких клетки), не находящейся на главной диагонали, сделав первый ход по главной диагонали, а затем вернуться двумя обратными ходами. Значит, таких способов – 24. 2) Ходить только по главной диагонали – 7·6·6·1=252 способа, т.к. для первого хода – 7 вариантов, для второго и третьего ходов – по 6 вариантов (без клетки *a*1 и клетки, с которой ходим), ля четвёртого хода – 1 вариант (клетка *a*1). Тогда всего 24+252=276 способов.)**

7. Из числа 13^{2016} вычли наибольший его делитель, не равный самому числу. Из полученной разности также вычли наибольший её делитель, не равный ей самой, и т.д., пока не после очередного вычитания не получилась единица. Сколько всего вычитаний было произведено? (**<u>5·2016 = 10080</u>. После первого вычитания получится 12×13^{2015}, после второго — 6×13^{2015}, после третьего — 3×13^{2015}, после четвёртого — 2×13^{2015}, после пятого — 13^{2015}. Аналогично, ещё через пять вычитаний получится 13^{2014} и т.д., пока через 5·2016 вычитаний не получится единица.)**

8. (*Задача Иосифа Флавия)* 50 человек встали по кругу и их пронумеровали подряд числами от 1 до 50. Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Какой номер будет у него? (**<u>37</u>. Если знать теорию (см. ниже решение задачи 14) и двоичную систему счисления, то легко найти по формуле из пункта в) ответ: $50=32+16+2=110010_2\rightarrow100101_2=32+4+1=37$, что симметрично 73, ответу в задаче 14:☺.)**

9. Пусть S – подмножество множества $\{1, 2,. . . , 8, 9\}$ такое, что все суммы любых двух различных чисел из S разные. Например, подмножество $\{1, 2, 5\}$ обладает этим свойством, а $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ нет, так как 1+ 4=2+ 3. Каково максимальное количество элементов, которые S может содержать? Приведите ответ и пример. (**<u>5 элементов, например, $\{1, 2, 3, 5, 8\}$</u>. Предположим, что наше множество содержит не менее 6 чисел, то различных пар будет не менее $\frac{6\cdot5}{2}=15$. А всего различных целых значений сумм от 3 до 17 тоже 15. Значит, все суммы реализуются. Но суммы 3 и 17 получаются единственным образом: 3=1+2, 17=9+8. Поэтому эти четыре числа обязательно есть в нашем множестве. Тогда 1+9=2+8. Противоречие с условием на множество. Значит, больше 5 элементов множество не содержит.)**

10. Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно, с одного места и в одном направлении. Они бегут с постоянными скоростями. Иванов впервые обогнал Петрова через a минут, а Петров впервые обогнал Сидорова через b минут. Через сколько минут Иванов впервые обогнал Сидорова? (**<u>$ab/(a+b)$</u>. Когда один бегун впервые обгоняет другого, это означает, что тот, кто обгоняет, пробежал ровно на круг больше. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Петрова на $1/a$ круга, а Петров каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/b$ круга. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/a+1/b$ часть круга, и обгонит его на круг через $1/(1/a+1/b) = ab/(a+b)$ минут.)**

11. Решите неравенство $a^2+b^2+c^2+4>ab+3b+2c$. (**<u>Любая тройка чисел, кроме a=1, b=2, c=1</u>. Наше неравенство равносильно неравенству $\left(\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2>0\right)$, которое справедливо всегда, кроме случая $a-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}-1=c-1=0$ при a=1, b=2, c=1.)**

12. По кругу стоят n коробок, в которых соответственно лежат 1, 2, 3, …, n камней. За один ход можно из коробки с бóльшим количеством камней переложить один камень в соседнюю коробку с меньшим количеством камней. При каких n процесс может остановиться? (**<u>При нечётных n</u>. Если ещё есть рядом стоящие коробки с разным количеством камней, то процесс будет продолжаться. Значит, остановиться он может только в случае равенства количества камней в коробках. Тогда суммарное количество камней $1+2+\ldots+n=(n+1)n/2$ должно делиться на n, что возможно только при нечётном n. Значит, при чётном n процесс будет бесконечно долгим. Докажем теперь, что в случае нечётного n процесс действительно может остановиться. Пронумеруем камни в каждой коробке и введём для каждого камня «вес» – его номер. Изначально суммарный вес всех камней равнялся $n\cdot1+(n-1)\cdot2+(n-2)\cdot3+\ldots+2\cdot(n-1)+1\cdot n$. Если ещё не во всех коробках поровну – по $p=(n+1)/2$ камней, то по принципу Дирихле найдутся коробки двух таких видов,**

что в каждой коробке первого вида будет больше *p*, а в каждой коробке второго вида – меньше *p* камней, т.е. разница между количествами камней будет не меньше 2. Тогда возьмём две ближайшие коробки разного вида, в коробках между которыми количества камней будут не возрастать от большей коробки к меньшей. Такая группа коробок найдётся, иначе у нас будут только коробки двух видов, отличающиеся по количеству камней на 1. Тогда мы постепенно переложим камень из б*о*льшей коробки в меньшую, тем самым уменьшив суммарный «вес» всей системы камней хотя бы на 1. Бесконечно долго процесс убывания суммарного «веса» хотя бы на 1 идти не может, т.к. «вес» всегда будет натуральным числом. Значит, в некоторый момент процесс остановиться, а в коробках окажется поровну камней.)

13. Произведение пяти целых чисел не равно нулю. Каждое из этих чисел уменьшили на единицу, при этом их произведение не изменилось. Приведите пример таких чисел. **(например, 5, 6, 7, 8,−1)**

14. (*Задача Иосифа Флавия)* 100 человек встали по кругу и их пронумеровали подряд числами от 1 до 100. Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Какой номер будет у него? **(73. Ниже приводится текст и идея решения в общем виде задачи №5.75 из книги Н.Б.Алфутовой и А.В.Устинова «Алгебра и теория чисел для математических школ» (стр. 79 и 204).**

5.75. Задача Иосифа Флавия. n человек выстраиваются по кругу и нумеруются числами от 1 до n. Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Например, если $n = 10$, то порядок исключения таков: 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, так что остается номер 5. Для данного n будем обозначать через $J(n)$ номер последнего оставшегося человека. Докажите, что

а) $J(2n) = 2J(n) - 1$;

б) $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$;

в) если $n = (1b_{m-1}b_{m-2} \ldots b_1b_0)_2$, то $J(n) = (b_{m-1}b_{m-2} \ldots b_1b_01)_2$.

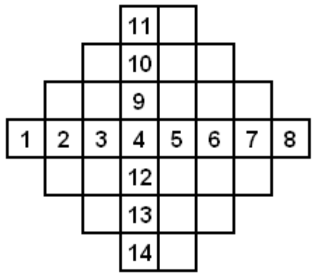
5.75. а) Если по кругу стоят числа 1, 2, …, $2n$, то вначале вычеркиваются все четные числа. Оставшиеся числа 1, 3, 5, …, $2n - 1$ снова подвергаются процедуре вычеркивания. k-е число в этом списке имеет вид $2k - 1$. После того, как из этого списка будут вычеркнуты все числа кроме одного, останется число с номером $J(n)$, которое равно $2J(n) - 1$.

Таким образом, если знать подобную теорию и двоичную систему счисления, то легко найти по формуле из пункта в) ответ: $100=64+32+4=1100100_2 \rightarrow 1001001_2=64+8+1=73$. Советуем потренироваться в нахождении ответа при других *n* и подумать над этой задачей в двоичной системе счисления.)

15. На шахматную доску по очереди выставляются слоны так, что каждый новый поставленный слон бьёт не более одного выставленного на тот момент на доску слона. Какое наибольшее количество слонов можно выставить на доску по таким правилам? **(28 слонов, пример см. на рис., где число показывает порядок постановки слонов. Будем рассуждать для**

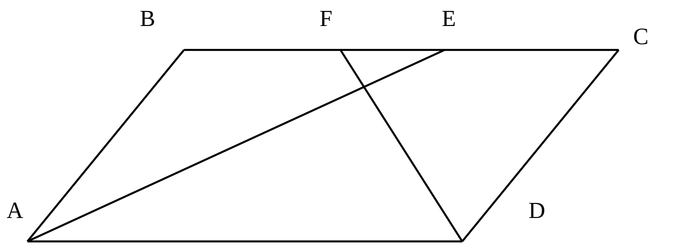
15							8
11	16					7	25
	10	17			6	24	
		9	18	5	23		
			4	19			
		3	26	12	20		
	2	27			13	21	
1	28					14	22

каждого из двух цветов шахматной доски отдельно, т.к. они на доске расположены симметрично и на каждом цвете будет одинаковый максимум выставленных слонов. <u>Доказательство оценки 1 (двудольный граф):</u> Заметим теперь, что на каждом цвете слон фактически является ладьёй на «ступенчатой» доске, получаемой из доски 7×8 (см. рис.). Рассмотрим двудольный граф, в котором строки и столбцы «ступенчатой» доски – вершины двух долей, а ребро – ладья на пересечении соответствующих строки и столбца. Тогда в этом графе не должно быть циклов, иначе последняя по очереди из цикла поставленная на доску ладья будет бить не менее двух ладей, что противоречит условию. Значит, граф представляет из себя лес, а тогда в нём рёбер не больше чем количество вершин минус 1, что соответствует дереву, т.е. количество рёбер-ладей не больше 7+8–1=14. Пример расстановки 14 ладей в нужном нам порядке см. на рис., он переводится на шахматной доске в расстановку слонов на каждом цвете отдельно.



<u>Доказательство оценки 2 (метод стенок)</u>: Первая выставленная слон-ладья на «ступенчатой» доске, получаемой из доски 7×8 (см. рис.), бьёт сразу 4 из 30 стенок (стороны клеток на краю доски), а остальные слон-ладьи бьют либо 2 новые стенки (если бьют одного кого-то выставленного) или 4 новые стенки (если никого не бьют). Значит, можно выставить не более 1+[26:2]=14 слонов-ладей на каждом цвете. <u>Доказательство оценки 3 (метод узелков)</u>: Первый выставленный слон бьёт ровно 4 угловых узла доски своего цвета из 30 угловых узлов (в предыдущем решении этим узлам соответствуют стенки «ступенчатой» доски), а остальные слоны бьют либо 2 новых узла (если бьют одного кого-то выставленного) или 4 новых узла (если никого не бьют). Значит, можно выставить не более 1+[26:2]=14 слонов на каждом цвете.)

16. В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы AE и DF, пересекающие сторону BC в точках E и F соответственно. Найдите длину BC, если AB=10 и EF=2. **(<u>18 или 22</u>. *<u>Первый случай</u>*. Порядок расположения точек на стороне таков: B, F, E, C. Так как $\angle DAE = \angle BAE$ (по определению биссектрисы) и $\angle DAB = \angle BEA$ (как накрест лежащие), то $\angle BAE = \angle BEA$ и, следовательно, треугольник ABE равнобедренный, поэтому $AB = BE$. Аналогично, $DC = CF$. Получаем, что $BC = BE + CF - FE = 10 + 10 - 2 = 18$.**



***<u>Второй сл</u>*учай. Порядок расположения точек на стороне таков: B, E, F, C. Тогда по-другому вычисляется длина $BC = BE + CF + FE = 10 + 10 + 2 = 22$.)**