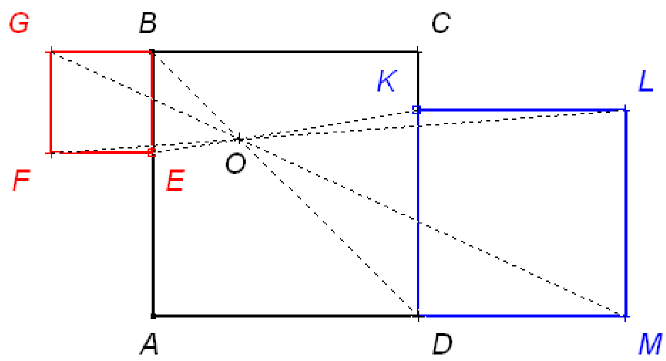
XII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
IX Турнир математических игр. Математическая игра «Пенальти».
Старшая лига (9-11 классы). Решения. 12 сентября 2016 года

1. Найдите множество значений параметра a, при которых уравнение $x^2-6ax+\left(2-2a+9a^2\right)=0$ имеет два корня, большие 3. (**$a>\frac{11}{9}$. Условие задачи равносильно неравенству $3a-\sqrt{9a^2-(2-2a+9a^2)}>3$, причём подкоренное выражение должно быть строго положительно, т.е. $a>1$ и $\sqrt{2(a-1)}<3(a-1)\Leftrightarrow\begin{cases}a>1\\2(a-1)<9(a-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow a-1>\frac{2}{9}$.)**

2. На сторонах AB и CD единичного квадрата $ABCD$ взяты точки E и K соответственно, а во внешнюю сторону построены квадраты $BEFG$ и $DKLM$ со сторонами a и b соответственно ($a<1$, $b<1$). Оказалось, что отрезки EK, FL и GM пересеклись в одной точке. При каких значениях отношения $a:b$ такое возможно? (**При любом положительном значении, что следует из гомотетии квадратов *BEFG* и *DKLM* с любыми возможными вариантами сторон относительно точки *O* пересечения отрезков *EK* и *BD*.**)



3. Пусть $a\circ b=a+b-ab$. Найти все такие тройки (x, y, z) целых чисел, что $(x\circ y)\circ z+(y\circ z)\circ x+(z\circ x)\circ y=0$. (**(0, 0, 0), (2, 2, 0), (2, 0, 2), (0, 2, 2). Обозначим $\bar{a}=1-a$ (исправленное число) и заметим, что $\overline{a\circ b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$. Таким образом, $\circ$ – обычная операция умножения, но над “исправленными” числами. Приведённое в условии уравнение превращается в $\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}=\bar{0}=1$. Отсюда либо $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=1$, т.е. $x=y=z=0$; либо два из чисел $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ равны (–1), а третье равно 1, откуда возникают три варианта чисел (0 и две 2).)**

1	3	4	2
4	2	1	3
3	1	2	4
2	4	3	1

4. Какое наибольшее количество коней можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый конь бил ровно одного коня? Приведите ответ и пример. (**32 коня. Разобьём всю доску на 4 квадрата 4×4, каждый из которых разобьём на 4 цикла из 4 клеток (см. рис.). В каждом из этих 16 циклов не более двух коней, иначе найдётся конь, бьющий не менее двух других коней, значит, всего не более 2·16=32 коней, пример расстановки которых методом пропеллера см. на рис.)**

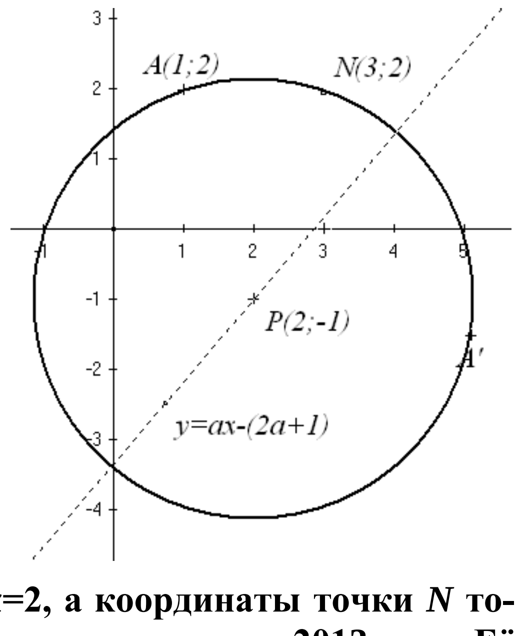
к	к	к	к			к	к
к	к	к	к			к	к
						к	к
						к	к
к	к						
к	к						
к	к			к	к	к	к
к	к			к	к	к	к

5. Найдите НОД множества всех чисел вида $n^{12}-n^8-n^4+1$ при всех нечётных n. (**$2^9=512$. $n^{12}-n^8-n^4+1=(n^8-1)(n^4-1)=(n^4-1)^2(n^4+1)=(n^2-1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)$. Число n^2-1 делится на 8, как произведение двух последовательных чётных чисел. Осталь-**

ные множители чётны, поэтому произведение всегда делится на $8^2 \cdot 2^3 = 2^9$. Но при этом при n=3 мы получим $8^2 \cdot 10^2 \cdot 82 = 2^9 \cdot 5^2 \cdot 41$, значит, больше, чем на девятую степень двойки, делимости не будет. При n=5 мы получим $24^2 \cdot 26^2 \cdot 626$ – число, не делящееся на 5 и 41, значит, НОД получающихся чисел равен 2^9.)

6. При каких натуральных n площадь треугольника ABC будет целочисленной, если стороны AB и AC равны соответственно n+1 и n+3, а медиана AM равна n? **(<u>$n=k^2+1$, где k – любое натуральное число</u>. Достроим ΔABC до параллелограмма $ABDC$, тогда площадь ΔABC равна площади треугольника ABD, стороны которого равны n+1, n+3 и 2n (удвоенной медиане AM). По формуле Герона найдём площадь $\sqrt{(2n+2)\cdot(n+1)\cdot(n-1)\cdot 2} = (2n+2)\sqrt{n-1}$. Чтобы площадь оказалась целочисленной, надо, чтобы $\sqrt{n-1}$ оказался рациональным числом, что возможно только при n, на 1 большем полного квадрата. В этом случае $\sqrt{n-1}$ будет целым числом, значит, и площадь будет целочисленной. Заметим также, что при всех натуральных $n \geq 2$ треугольник со сторонами n+1, n+3 и 2n существует согласно неравенству треугольника. *<u>Комментарий</u>*: см. идею задачи 1-4 игры «Домино» со смены 2015 года.)**

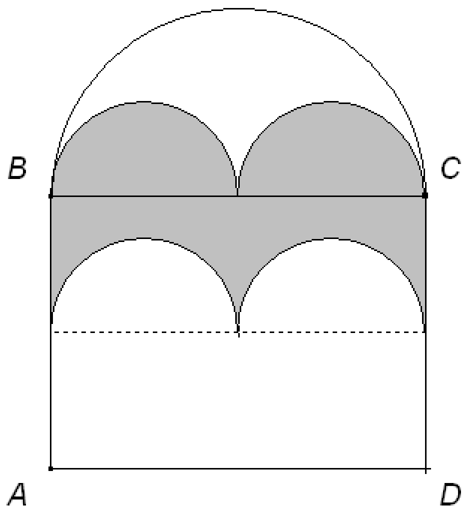
7. На координатной плоскости xOy отмечена точка A(1; 2). За один ход разрешается выбрать действительное число a и отметить на плоскости точку, симметричную одной из уже отмеченных относительно прямой $y = ax - (2a + 1)$. Укажите геометрическое место точек, которые могут быть отмечены за один ход. *Ответ дать одним предложением.* **(<u>Окружность с центром в точке P(2; −1) радиуса $\sqrt{10}$, за исключением точки N(3; 2)</u>. Заметим, что при всяком a прямая $y = ax - (2a + 1)$ проходит через точку P(2; −1). Так как при симметрии относительно некоторой прямой l расстояние от любой точки этой прямой до любой точки F и до её образа F' одинаково, все отмеченные точки будут находиться на одном и том же расстоянии от точки P, равном $PA = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$. Значит, все отмеченные точки лежат на окружности с центром в точке P(2; −1) радиуса $\sqrt{10}$. Заметим, что выбирая параметр a, мы можем получить любую прямую, проходящую через точку P, кроме вертикальной. Любые две точки окружности симметричны относительно единственной прямой, проходящей через центр окружности, поэтому за один ход мы можем получить любую точку этой окружности, кроме точки N, симметричной точке A, относительно вертикальной прямой, проходящей через точку P. Уравнение этой прямой x=2, а координаты точки N тогда (3; 2). *<u>Комментарий</u>*: см. задачу 7 игры «Пенальти» со смены 2013 года. Её тогда не решил ни один школьник.)**



8. (*Задача Иосифа Флавия)* 50 человек встали по кругу и их пронумеровали подряд числами от 1 до 50. Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Какой номер будет у него? **(<u>37</u>. Если знать теорию (см. ниже решение задачи 14) и двоич-**

ную систему счисления, то легко найти по формуле из пункта в) ответ: $50=32+16+2=110010_2 \to 100101_2=32+4+1=37$, что симметрично 73, ответу в задаче 14:☺.)

9. Пусть S – подмножество множества $\{1, 2, ..., 8, 9\}$ такое, что все суммы любых двух различных чисел из S разные. Например, подмножество $\{1, 2, 5\}$ обладает этим свойством, а $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ нет, так как $1+4=2+3$. Каково максимальное количество элементов, которые S может содержать? Приведите ответ и пример. **(<u>5 элементов, например, $\{1, 2, 3, 5, 8\}$</u>. Предположим, что наше множество содержит не менее 6 чисел, то различных пар будет не менее $\frac{6\cdot 5}{2}=15$. А всего различных целых значений сумм от 3 до 17 тоже 15. Значит, все суммы реализуются. Но суммы 3 и 17 получаются единственным образом: 3=1+2, 17=9+8. Поэтому эти четыре числа обязательно есть в нашем множестве. Тогда 1+9=2+8. Противоречие с условием на множество. Значит, больше 5 элементов множество не содержит.)**



10. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ ($AB=a$, $BC=b$) во внешнюю сторону как на диаметре построена полуокружность. Найдите площадь множества, являющегося ГМТ середин отрезков, один конец которого лежит на полуокружности, а другой – на стороне AB или CD. **(<u>$ab/2$</u>. Рассмотрим произвольную точку X на стороне CD. Тогда при $H_X^{0.5}$ полуокружность с концами B и C перейдёт в полуокружность с концами в середине XC и точке пересечения BX с отрезком, соединяющим середины BC и AD. Аналогично со стороной AB. Тогда искомое множество заключено между полуокружностями (см. рис), а его площадь равна половине площади исходного прямоугольника, т.к. выпирающие вверх 2 полукруга можно вставить вместо получающихся двух аналогичных дырок внизу.)**

11. Решите неравенство $a^2+b^2+c^2+4>ab+3b+2c$. **(<u>Любая тройка чисел, кроме $a=1$, $b=2$, $c=1$</u>. Наше неравенство равносильно неравенству $\left(\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2>0\right)$, которое справедливо всегда, кроме случая $a-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}-1=c-1=0$ при $a=1$, $b=2$, $c=1$.)**

12. Найдите значение произведения $\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{3\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}\cdot\sin\frac{9\pi}{18}$.

($\frac{1}{16}$. Трижды применим формулу синуса двойного угла $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

$$\sin\frac{8\pi}{18}=2\sin\frac{4\pi}{18}\cdot\cos\frac{4\pi}{18}=4\sin\frac{2\pi}{18}\cdot\cos\frac{2\pi}{18}\cdot\cos\frac{4\pi}{18}=$$

$=8\sin\frac{\pi}{18}\cdot\cos\frac{\pi}{18}\cdot\cos\frac{2\pi}{18}\cdot\cos\frac{4\pi}{18}$. **Заменяя косинусы синусами дополнительных углов** ($\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$), **преобразуем полученное тождество к виду** $\sin\frac{8\pi}{18}=8\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{8\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}$, **значит,** $\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}=\frac{1}{8}$. **Но** $\sin\frac{3\pi}{18}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{9\pi}{18}=\sin\frac{\pi}{2}=1$, **значит, нужное нам произведение равно** $\frac{1}{16}$**.)**

13. На координатной плоскости *xOy* отмечена точка *A*(1; 2). За один ход разрешается выбрать действительное число *a* и отметить на плоскости точку, симметричную одной из уже отмеченных относительно прямой *y* = *ax* − (3*a* + 1). Укажите геометрическое место точек, которые могут быть отмечены за один ход. *Ответ дать одним предложением.* **(<u>Окружность с центром в точке *P*(3; −1) радиуса $\sqrt{13}$, за исключением точки *N*(5; 2)</u>. Решение аналогично задаче 7.)**

14. (*Задача Иосифа Флавия)* 100 человек встали по кругу и их пронумеровали подряд числами от 1 до 100. Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Какой номер будет у него? **(<u>73</u>. Ниже приводится текст и идея решения в общем виде задачи №5.75 из книги Н.Б.Алфутовой и А.В.Устинова «Алгебра и теория чисел для математических школ» (стр. 79 и 204).**

5.75. Задача Иосифа Флавия. n человек выстраиваются по кругу и нумеруются числами от 1 до n. Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Например, если $n = 10$, то порядок исключения таков: 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, так что остается номер 5. Для данного n будем обозначать через $J(n)$ номер последнего оставшегося человека. Докажите, что

а) $J(2n) = 2J(n) - 1$;

б) $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$;

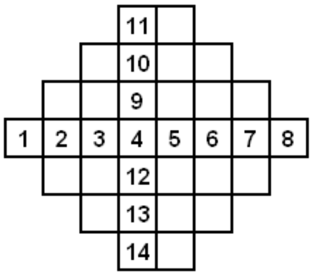
в) если $n = (1b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2$, то $J(n) = (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_01)_2$.

5.75. а) Если по кругу стоят числа 1, 2, …, $2n$, то вначале вычеркиваются все четные числа. Оставшиеся числа 1, 3, 5, …, $2n-1$ снова подвергаются процедуре вычеркивания. k-е число в этом списке имеет вид $2k-1$. После того, как из этого списка будут вычеркнуты все числа кроме одного, останется число с номером $J(n)$, которое равно $2J(n)-1$.

Таким образом, если знать подобную теорию и двоичную систему счисления, то легко найти по формуле из пункта в) ответ: 100=64+32+4=$1100100_2\to1001001_2$=64+8+1=73. Советуем потренироваться в нахождении ответа при других *n* и подумать над этой задачей в двоичной системе счисления.)

15. На шахматную доску по очереди выставляются слоны так, что каждый новый поставленный слон бьёт не более одного выставленного на тот момент на доску слона. Какое наибольшее количество слонов можно выставить на доску по таким правилам? **(<u>28 слонов, пример см. на рис., где число показывает порядок постановки слонов</u>. Будем рассуждать для каждого из двух цветов шахматной доски отдельно, т.к. они на доске расположены симметрично и на каждом цвете будет одинаковый максимум выставленных слонов. <u>Доказательство оценки 1 (двудольный граф):</u> Заметим теперь, что на каждом цвете слон фактически является ладьёй на «ступенчатой» доске, получаемой из доски 7×8 (см. рис.). Рассмотрим двудольный граф, в котором строки и столбцы «ступенчатой» доски – вершины двух долей, а ребро – ладья на пересечении соответствующих строки и столбца. Тогда в этом графе не должно быть циклов, иначе последняя по очереди из цикла поставленная на доску ладья будет бить не менее двух ладей, что противоречит условию. Значит, граф представляет из себя лес, а тогда в нём рёбер не больше чем количество вершин минус 1, что соответствует дереву, т.е. количество рёбер-ладей не больше 7+8–1=14. Пример расстановки 14 ладей в нужном нам порядке см. на рис., он переводится на шахматной доске в расстановку слонов на каждом цвете отдельно. <u>Доказательство оценки 2 (метод стенок)</u>: Первая выставленная слон-ладья на «ступенчатой» доске, получаемой из доски 7×8 (см. рис.), бьёт сразу 4 из 30 стенок (стороны клеток на краю доски), а остальные слон-ладьи бьют либо 2 новые стенки (если бьют одного кого-то выставленного) или 4 новые стенки (если никого не бьют). Значит, можно выставить не более 1+[26:2]=14 слонов-ладей на каждом цвете. <u>Доказательство оценки 3 (метод узелков)</u>: Первый выставленный слон бьёт ровно 4 угловых узла доски своего цвета из 30 угловых узлов (в предыдущем решении этим узлам соответствуют стенки «ступенчатой» доски), а остальные слоны бьют либо 2 новых узла (если бьют одного кого-то выставленного) или 4 новых узла (если никого не бьют). Значит, можно выставить не более 1+[26:2]=14 слонов на каждом цвете.)**

15							8
11	16					7	25
	10	17			6	24	
		9	18	5	23		
			4	19			
		3	26	12	20		
	2	27			13	21	
1	28					14	22



16. Найдите все целые числа n, для которых число $\sqrt{\dfrac{25}{2}+\sqrt{\dfrac{625}{4}-n}}+\sqrt{\dfrac{25}{2}-\sqrt{\dfrac{625}{4}-n}}$ – целое. **(<u>$n \in \{0;\ 144\}$</u>. Если указанное число A – целое, то и $A^2 = 25 + 2\sqrt{n}$ – целое число. Так как $2\sqrt{n} \le 25$, то $A^2 \le 50$. Кроме того, число A^2 нечетно. Поэтому A равно 5 или 7. Соответственно, $\sqrt{n}$ равен 0 или 12.)**