XII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
IX Турнир математических игр. Математическая игра «Пенальти».
Старшая лига (9-11 классы). 12 сентября 2016 года
Вариант 1.

1. Найдите множество значений параметра a, при которых уравнение $x^2 - 6ax + (2 - 2a + 9a^2) = 0$ имеет два корня, большие 3.

2. На сторонах AB и CD единичного квадрата $ABCD$ взяты точки E и K соответственно, а во внешнюю сторону построены квадраты $BEFG$ и $DKLM$ со сторонами a и b соответственно ($a<1$, $b<1$). Оказалось, что отрезки EK, FL и GM пересеклись в одной точке. При каких значениях отношения $a:b$ такое возможно?

3. Пусть $a\text{o}b = a + b - ab$. Найти все такие тройки (x, y, z) целых чисел, что $(x\text{o}y)\text{o}z + (y\text{o}z)\text{o}x + (z\text{o}x)\text{o}y = 0$.

4. Какое наибольшее количество коней можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый конь бил ровно одного коня? Приведите ответ и пример.

5. Найдите НОД множества всех чисел вида $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ при всех нечётных n.

6. При каких натуральных n площадь треугольника ABC будет целочисленной, если стороны AB и AC равны соответственно $n+1$ и $n+3$, а медиана AM равна n?

7. На координатной плоскости xOy отмечена точка $A(1; 2)$. За один ход разрешается выбрать действительное число a и отметить на плоскости точку, симметричную одной из уже отмеченных относительно прямой $y = ax - (2a + 1)$. Укажите геометрическое место точек, которые могут быть отмечены за один ход. *Ответ дать одним предложением.*

8. (*Задача Иосифа Флавия)* 50 человек встали по кругу и их пронумеровали подряд числами от 1 до 50. Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Какой номер будет у него?

XII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
IX Турнир математических игр. Математическая игра «Пенальти».
Старшая лига (9-11 классы). 12 сентября 2016 года
Вариант 2.

9. Пусть S – подмножество множества $\{1, 2, . . . , 8, 9\}$ такое, что все суммы любых двух различных чисел из S разные. Например, подмножество $\{1, 2, 5\}$ обладает этим свойством, а $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ нет, так как $1 + 4 = 2 + 3$. Каково максимальное количество элементов, которые S может содержать? Приведите ответ и пример.

10. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ ($AB=a$, $BC=b$) во внешнюю сторону как на диаметре построена полуокружность. Найдите площадь множества, являющегося ГМТ середин отрезков, один конец которого лежит на полуокружности, а другой – на стороне AB или CD**.**

11. Решите неравенство $a^2+b^2+c^2+4>ab+3b+2c$.

12. Найдите значение произведения $\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{3\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}\cdot\sin\frac{9\pi}{18}$.

13. На координатной плоскости xOy отмечена точка $A(1; 2)$. За один ход разрешается выбрать действительное число a и отметить на плоскости точку, симметричную одной из уже отмеченных относительно прямой $y = ax - (3a + 1)$. Укажите геометрическое место точек, которые могут быть отмечены за один ход. *Ответ дать одним предложением.*

14. (*Задача Иосифа Флавия)* 100 человек встали по кругу и их пронумеровали подряд числами от 1 до 100. Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Какой номер будет у него?

15. На шахматную доску по очереди выставляются слоны так, что каждый новый поставленный слон бьёт не более одного выставленного на тот момент на доску слона. Какое наибольшее количество слонов можно выставить на доску по таким правилам?

16. Найдите все целые числа n, для которых число $\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$ – целое.