Тринадцатая Всероссийская смена «Юный математик»

Задания конкурсного отбора

8 класс

14 мая 2017 г.

1. Найдите какое-нибудь натуральное число N такое, что если к нему прибавить его наибольший делитель, отличный от N, то получится 2016.
2. Самый быстрый бегун в классе бегает на 0,1 м/с быстрее второго, на 0,2 м/с быстрее третьего и на 0,3 м/с быстрее четвертого. Для эстафеты 2×400 м составили две команды. В первую взяли самого быстрого и самого медленного из этих четырех, во вторую – оставшихся двух школьников. Какая команда быстрее пробежит эстафету? (Каждый бегун бежит дистанцию с постоянной скоростью.)
3. Библиотекарь разложил книги одинаковой толщины в 30 стопок, после чего расставил стопки по кругу. Каждая стопка содержит $1, 2, 3, \ldots, 30$ книг (ровно по одной стопке каждого количества). Стопка называется правильной, если она выше одной из соседних стопок, но ниже другой. Оказалось, что ровно 10 стопок — правильные. Докажите, что суммарное число книг в правильных стопках не равна 64.
4. Какие простые числа можно представить в виде $|n-1| + |n-2| + |n-3| + |n-4| + |n-5|$ при целых n?
5. В объединенном конгрессе Лилипутии и Блефуску участвовало 107 человек, каждый из которых является остроконечником или тупоконечником. Остроконечники правильно отличают своих от чужих, а тупоконечники путают своих с чужими и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник конгресса подошёл к кому-то, сказал «Какой вы остроконечный!» и подарил открытку. Какое наименьшее количество человек могло не получить ни одной открытки?
6. На доске написано 10 последовательных целых чисел (среди них могут быть и отрицательные). Школьнику, указавшему число, после вычёркивания которого сумма оставшихся девяти чисел на доске является квадратом целого числа, Мария Ивановна ставит пятёрку (если это число еще не было никем названо ранее). Какое наибольшее количество пятёрок могли получить ученики Марии Ивановны? Не забудьте объяснить, почему невозможно получить большее количество пятёрок.
7. Конкурсную олимпиаду писало 9000 школьников. Каждый из них получил оценку от 0 до 15 баллов. При занесении в компьютер оценки 12, 13 или 14 баллов были заменены на 15 баллов, а оценки 1, 2 или 3 балла — на 0 баллов (остальные оценки не менялись). В результате средний балл всех участников уменьшился на $0{,}1$ балла. Докажите, что до исправления можно было указать две такие оценки a и b, что число школьников с оценкой a баллов и число школьников с оценкой b баллов отличались не менее чем на 150.
8. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E, а на отрезке BE — точка D. Известно, что $BD = AE$, $CE = CD = BE$. Докажите, что $\angle B > 60°$.