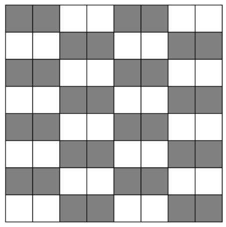
XIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». X Турнир математических игр.

Игра «Домино». ***Младшая лига (7-9 класс).*** **Решения. 09.09.2017**

	ф	ф			
					ф
					ф
ф					
ф					
			ф	ф	

0–0. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на доске 6×6 так, чтобы каждый ферзь бил ровно одного ферзя? Приведите ответ и пример. **(<u>8 ферзей</u> – см. расстановку методом «пропеллера». *<u>Доказательство оценки методом рядов</u>*: Ферзи разбиваются на пары, каждая из которых находится хотя бы в трёх различных рядах (строках и столбцах) из 12 возможных. Тогда всего не более 12:3=4 пар ферзей, т.е. всего не более 2·4=8 ферзей. *<u>Доказательство оценки методом стенок:</u>* каждый ферзь бьёт хотя бы 3 своих стенки из 4·6=24 возможных, значит, ферзей не более 24:3=8.)**

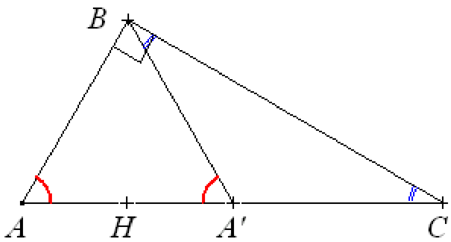
0–1. Найдите сумму цифр числа $4^{13}\cdot5^{31}$ в десятичной записи. **(<u>11</u>. Преобразуем: $4^{13}\cdot5^{31} = 2^{26}\cdot5^{31} = 2^{26}\cdot5^{26}\cdot5^5 = 5^5\cdot10^{26} = 3125\cdot10^{26} = 31250…0$ (*26 нулей*). Сумма цифр полученного числа равна 11.)**



0–2. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на поле 8×8 так, чтобы у каждой отмеченной клетки была ровно одна отмеченная соседняя (по стороне) клетка? Приведите ответ и пример. **(<u>32 клетки – см. пример</u>. Разобьём поле на 16 квадратов 2×2, в каждом таком квадрате максимум 2 отмеченные клетки, иначе найдутся три клетки образующие уголок и одна из них будет иметь две соседних отмеченных клетки. Значит, всего не более 2·16=32 отмеченных клеток.)**

0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2
0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2
0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2

0–3. При каком наибольшем n в таблицу из пяти строк и n столбцов можно вписать числа 0, 1 или 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы? **(<u>11</u>, т.к. суммы в столбцах могут принимать только 11 различных целых значений – от 0 до 10=5·2. Пример – см. таблицу.)**



0–4. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, разность которых равна одному из катетов треугольника. Найти углы треугольника. **(<u>30°, 60°, 90°</u>. Пусть ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом B и высотой BH. Пусть $AH<HC$ (т.е. AB – меньший катет). На отрезке HC отметим точку A' такую, что $AH=HA'$. Из условия задачи следует, что $A'C=AB=BA'$. Поэтому $\angle BAC=\angle AA'B=2\angle ACB$. Отсюда находим, что $\angle ACB=30°$, $\angle BAC=60°$.)**

0–5. Какое наименьшее количество чёрных трёхклеточных уголков можно разместить по линиям сетки в белом квадрате 5×5 так, чтобы не осталось ни одного белого трёхклеточного уголка? Приведите ответ и пример. **(<u>4, см. пример на рис.1 (методом пропеллера), в котором числа показывают номер уголка</u>. Предположим, нам хватит меньше 4 уголков, тогда мы обойдёмся 3 уголками, которые содержат 9 чёрных клеток. На доске можно методом пропеллера выделить 4 прямоугольника 2×3, состоящих из двух уголков, значит, в каждом из этих прямоугольников должно быть минимум по 2 чёрных клетки. По принципу Дирихле хотя бы в трёх прямоугольниках будут лежать ровно по 2 из наших 9 чёрных клеток, при этом перебор показывает, что эти 2 клетки должны занимать средний из трёх рядов прямоугольника 2×3, иначе появится белый трёхклеточный уголок. Но эти три прямоугольника лежат по кругу подряд и на стыке между ними будет белый трёхклеточный уголок (см. рис.2) – противоречие.)**

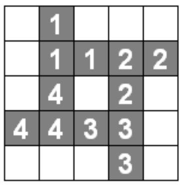


рис.1

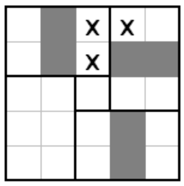


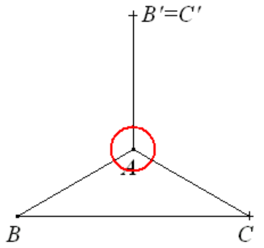
рис. 2

0–6. Найдите наименьшее натуральное n такое, что n^2+p не является простым ни для какого простого p. **(<u>5</u>. $1^2+2=3$, $2^2+3=7$, $3^2+2=11$, $4^2+3=19$ – простые числа, значит, $n\geq5$. $5^2+2=27$, 5^2+p – чётное, не меньшее 28, при нечётных простых p, значит, 5 подходит.)**

1–1. Найдите коэффициент b квадратного трехчлена x^2+bx+3, имеющего ровно 1 корень. **($b=\pm2\sqrt{3}$, т.к. трехчлен x^2+bx+3 должен оказаться полным квадратом $(x\pm\sqrt{3})^2$)**

1–2. Действительные числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2+c^2=2000$ и $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=2017$. Найдите $a+b+c$. **($\pm\sqrt{17}$. $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2$, значит, $a+b+c=\pm\sqrt{2017-2000}=\pm\sqrt{17}$.)**

1–3. Вершины треугольника *ABC* отобразили симметрично относительно противоположных сторон, при этом образы точек *B* и *C* совпали. Найдите углы треугольника. **(120°, 30°, 30°. В силу совпадения образов *AB*=*AB'*=*AC'*=*AC*, значит, треугольник *ABC* – равнобедренный. Кроме того, в силу симметрии ∠*BAC*=∠*B'AC*=∠*C'AB*, а в сумме они дают 360°, значит, каждый из этих углов равен 120°.)**

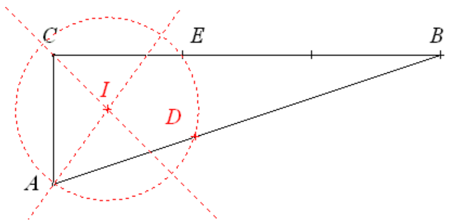


1–4. При каких значениях параметра *a* уравнение $\sqrt{x-a^2}=\sqrt{x}-a$ имеет единственное решение? **(*a*>0. После возведения в квадрат и очевидных преобразований получим, что $a\sqrt{x}=a^2$. При *a*=0 исходное уравнение будет иметь бесконечно много решений. Значит, $\sqrt{x}=a>0$.)**

1–5. Обозначим через *d*(*X*, *YZ*) расстояние от точки *X* до прямой *YZ*. Точка *P* внутри треугольника *ABC* такова, что отношения *d*(*A*, *BC*)/*d*(*P*, *BC*), *d*(*B*, *CA*)/*d*(*P*, *CA*) и *d*(*C*, *AB*)/*d*(*P*, *AB*) равны. Найдите их значение. **(3. Данные отношения есть отношения высот треугольника *ABC*, проведённых к сторонам *BC*, *CA* и *AB*, и высот треугольников *PBC*, *PCA*, *PAB*, проведённых из точки *P* к этим же сторонам, что равно отношениям площади треугольника *ABC* к площадям этих треугольников. Значит, площади этих треугольников равны между собой и равны 1/3 площади *ABC*, следовательно, данные отношения равны 3.)**

1–6. При каких *n* среди всех *n*-значных чисел больше половины составляют числа, содержащие в своей десятичной записи хотя бы 1 ноль? **(При натуральных *n*≥8. Среди $9\cdot10^{n-1}$ всех *n*-значных чисел ровно 9^n чисел, не содержащих нулей, значит, должно выполняться неравенство $\frac{9^n}{9\cdot10^{n-1}}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}<\frac{1}{2}$. Заметим, что $(0{,}9)^7=0{,}4782969<0{,}5<0{,}531441=(0{,}9)^6$, значит, (*n*–1)≥7.)**

2–2. За круглым столом сидит 31 человек. Часть из них – рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные – лжецы, которые всегда лгут, причем лжецов не менее одного. Каждого спросили: «Сколько среди твоих соседей лжецов?». Все дали одинаковые ответы. Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться за столом? **(15 рыцарей, например, когда под нечётными номерами (1, 3, …31) сидят лжецы, а под чётными (2, 4, …30) – рыцари. Предположим, будет не менее 16 рыцарей, тогда в промежутках между ними сидят не более 15 лжецов, значит, хотя бы один из промежутков будет без лжеца, значит, есть два рыцаря, сидящих рядом. Тогда они сказали либо про 0, либо про 1 лжеца среди своих соседей. Если бы сказали про 0 лжецов, значит, далее за ними по кругу сидели бы только лжецы, что противоречит наличию в круге лжецов. Если бы они сказали про 1, тогда за столом бы сидели циклически группы по 3 человека (рыцарь, рыцарь, лжец), т.е. было бы кратное трём количество человек, а 31 не делится на 3, снова противоречие. Значит, будет не более 15 рыцарей.)**



2–3. На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC*, в котором *BC*=3*AC*, взята точки *D* такая, что *AI*=*DI*, где *I* – центр вписанной окружности треугольника *ABC*. Найдите отношение *BD*:*AC*. **(2. Треугольники *BDI* и *BEI* равны, где *E* – точка на катете *BC* такая, что *AI*=*EI*, *AC*=*CE*. Значит, *BD*=*BE*=2*AC*.)**

2–4. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел *a* и *b* если число *a*–2*b* натуральное, то оно того же цвета, что и *a*. Сколько существует таких раскрасок? **(4 раскраски. Пусть 1 – первого цвета, тогда нет самого большого нечётного числа 2*n*+1 первого цвета (где *n* – некоторое целое неотрицательное число), т.к. иначе его можно получить в виде *a*–2*b*=6*n*+7–2(2*n*+3)= 2*n*+1 из двух нечётных чисел *a*=6*n*+7 и *b*=2*n*+3 второго цвета – противоречие. А из каждого нечётного (большего 3) числа первого цвета мы получим число на 2·1=2 меньше также первого цвета. Отсюда следует, что все нечётные числа будут одного (первого) цвета. Аналогично нет самого большого чётного числа первого цвета. Значит, все чётные числа будут одного цвета – первого или второго. Тогда у нас 4 варианта раскраски двух одноцветных множеств (чётные и нечётные числа) в два цвета.)**

2–5. Найдите все квадратные трехчлены ax^2+bx+c, у которых коэффициенты *a*, *b*, *c* и корни x_1, x_2 образуют (в некотором порядке) множество из пяти последовательных натуральных чисел. **(Таких трехчленов нет. Если бы все три коэффициента трехчлена были натуральными числами, то корни должны быть отрицательными числами, что противоречит условию.)**

2–6. Найдите наибольшее количество сторон невыпуклого многоугольника, у которого ровно 8 внутренних углов больше 90°. **(<u>27</u>. Пусть всего *n* вершин, тогда сумма углов равна $(n–2)\cdot 180°$, что меньше $8\cdot 360°+(n–8)\cdot 90°$, т.к. ровно 8 углов будут больше 90°, но меньше 360°, а (n–8) остальных углов не превосходят 90°. Из данного неравенства находим $n<28$. При этом можно построить невыпуклый 27-угольник, у которого ровно 8 углов больше 90°.)**

3–3. На доске записаны все девятизначные натуральные числа, десятичная запись которых содержит каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее среди записанных на доске чисел и стирают. Какая пара чисел будет стёрта последней? **(<u>549876321 и 561234789</u>. На доске записано по 8! чисел, начинающихся с 1, 2, …, 9. Поэтому после 4×8! стираний на ней останутся в точности все числа, начинающиеся с пятерки. Сотрём все начальные пятерки — порядок чисел от этого не изменится. Останется по 7! чисел, начинающихся с 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9. Последними, очевидно, будут стерты самое больше число, начинающееся на 4: 49876321 и самое маленькое, начинающееся на 6: 61234789. Вернув стертые пятерки, получаем ответ.)**

3–4. Десятизначное число назовём *хитрым*, если все его цифры – единицы, двойки и тройки, а разность каждых двух соседних цифр равна 1. Найдите сумму всех хитрых чисел. **(<u>$2^7\cdot 1111111111=142222222208$</u>. В хитром числе чередуются 2 и нечётная цифра (1 или 3). Всего хитрых чисел $2\cdot 2^5=2^6$, т.к. двойки можно поставить двумя способами (на чётные или нечётные по номерам места), а на остальных пяти местах 1 и 3 можно разместить 2^5 способами. Хитрые числа разбиваются на пары, дающие в сумме 4444444444, где в парных числах в одинаковых разрядах стоят двойки, а 1 и 3 дополняют друг друга, например, 1232323212+3212121232=4444444444. Значит, вся сумма равна $4444444444\cdot 2^6:2=2^7\cdot 11111111111$.)**

3–5. Для каждой пары натуральных чисел *a*, *b* введена операция $a\oplus b$ с такими свойствами: 1) $a\oplus a = a+2$; 2) $a\oplus b = b\oplus a$; 3) $\dfrac{a\oplus(a+b)}{a\oplus b}=\dfrac{a+b}{b}$. Найдите $3\oplus 5$. **(<u>45</u>.** $1\oplus 1=1+2=3$,

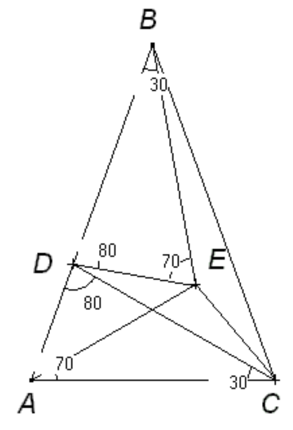
$$\frac{1\oplus 2}{1\oplus 1}=\frac{1\oplus(1+1)}{1\oplus 1}=\frac{1+1}{1}=2,\quad 1\oplus 2=2\cdot(1\oplus 1)=2\cdot 3=6,\quad \frac{2\oplus 3}{1\oplus 2}=\frac{2\oplus(2+1)}{2\oplus 1}=\frac{2+1}{1}=3,$$

$$2\oplus 3=3\cdot(1\oplus 2)=3\cdot 6=18,\quad \frac{3\oplus 5}{2\oplus 3}=\frac{3\oplus(3+2)}{3\oplus 2}=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2},\quad 3\oplus 5=\frac{5}{2}\cdot(2\oplus 3)=\frac{5}{2}\cdot 18=45.$$

***<u>Комментарий</u>:* Фактически это задача про числа Фибоначчи.)**

3–6. В компании из 300 человек каждый знаком ровно с тремя другими. При каком наименьшем *k* про такую компанию можно наверняка утверждать, что среди любых *k* человек найдутся двое знакомых? **(<u>151</u>. Если среди них не найдётся пары знакомых, то эти 151 человек имеют $151\cdot 3=453$ знакомств с остальными, у которых в сумме не более $149\cdot 3=447$ знакомств, что меньше уже имеющихся 453 знакомств с ними. Противоречие. Если $k\le 150$, то в качестве контр-примера подойдёт компания – двудольный граф, в котором люди вершины разбиты на 50 компонент связности по 6 вершин, где каждая компонента является полным двудольным графом $K_{3,3}$. Тогда выбрав *k* людей из одной доли, получим группу без знакомых.)**

4–4. На боковой стороне *AB* равнобедренного треугольника *ABC* (*AB* = *BC*) выбрана такая точка *D*, что $\angle ACD = 30°$. А внутри треугольника *ABC* выбрана такая *E*, что $\angle CBE = 10°$ и $\angle BED = 70°$. Найдите $\angle BAE$, если известно, что $\angle ABC = 40°$. **(<u>40°</u>. $\angle DCB=\angle ACB–\angle ACD=(180°–40°)/2–30°=40°=\angle DBC \Rightarrow BD=DC \Rightarrow \Delta BDE=\Delta CDA$ по стороне ($BD=CD$) и двум прилежащим углам ($\angle DBE=\angle DCA=30°$, $\angle BDE=\angle CDA=180°–30°–70°=80°$) $\Rightarrow AD=DE \Rightarrow \angle DAE=\angle AED=\angle BDE/2=80°/2=40°$.)**



4–5. Даны таблица 10x10 клеток и *N* фишек. Рассматриваются все расстановки фишек в клетки таблицы, удовлетворяющие условию: никакие две фишки не стоят в соседних (по стороне) клетках. При каком наибольшем *N* в любой из расстановок можно найти хотя бы одну фишку такую, что от её перемещения в соседнюю клетку заданное условие не нарушится? **(При <u>*N*=9</u>. Заметим, что для 10 фишек существует расстановка (все фишки стоят на клетках большой диагонали), не удовлетворяющая условию задачи, – перемещение любой фишки в соседнюю клетку нарушает требуемое условие. Назовём расстановку фишек "жесткой", если перемещение любой фишки в соседнюю клетку нарушает требуемое условие. Докажем, что любая расстановка, в которой меньше, чем 10 фишек, не является**

"жесткой". Пусть существует "жесткая" расстановка, тогда в таблице найдутся пустые столбцы (*s* штук). Два пустых столбца не могут быть соседними и пустой столбец не может быть крайним, иначе можно будет передвинуть фишку. Значит, слева от пустого столбца есть хотя бы одна фишка, которую нельзя сдвинуть вправо в этот пустой столбец, т.е. в той же строке справа от пустого столбца стоит другая фишка. Т.о., для каждой такой "левой" фишки найдется "правая" фишка, стоящая в той же строке. "Левых" фишек не меньше, чем *s* , следовательно и "правых" фишек– не меньше, чем *s* . Поскольку всего фишек не больше, чем 9, то они занимают не более, чем (99–*s*) строк, следовательно, не менее, чем 10–(9–*s*)=*s*+1 строк останутся свободными. Так как *s*+1>*s*, то тем самым доказано, что свободных строк в таблице больше, чем свободных столбцов. Поскольку столбцы и строки в таблице равноправны, то, рассуждая аналогично, можно доказать, что количество пустых столбцов строго больше, чем количество пустых строк. Такое противоречие показывает, что наше предположение неверно, и любая расстановка, в которой меньше, чем 10 фишек, "жесткой" не является.)

4–6. Петя расставил на поле 9×9 комплект, состоящий из 1 корабля 1×5, 2 кораблей 1×4, 3 кораблей 1×3, 4 кораблей 1×2 и 5 кораблей 1×1 (корабли не могут соприкасаться между собой). Какое наибольшее количество выстрелов может сделать Вова, чтобы гарантированно не попасть ни в один из кораблей? Приведите ответ и пример. **(<u>4 выстрела, в клетки, соседние по диагонали с угловыми клетками</u>. Данный комплект кораблей занимает ровно 100 узлов (12+2·10+3·8+4·6+5·4), а их на поле также ровно 100=10·10, значит, все узлы будут заняты, в том числе и угловые. Тогда клетки, соседние по диагонали с угловыми, будут свободны – в них и может выстрелить Вова.**

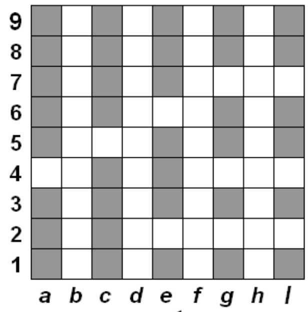


рис.1

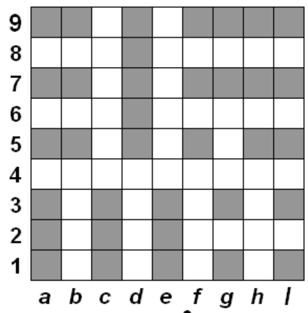
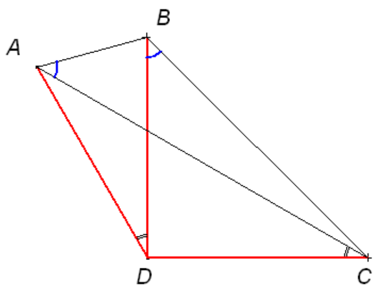


рис.2

Остальные же клетки могут быть заняты, что видно из двух вариантов расстановки кораблей. Все клетки нечётных по номерам строк и столбцов могут быть закрыты при комбинациях перестановки рядов с рис.1, а все клетки четвёртого ряда (от какого-либо края) могут оказаться закрытыми при перестановках и поворотах расстановки на рис.2 (где в этом главную роль играет корабль 1×5). Таким образом, любая из остальных клеток, кроме 4-х указанных, могла оказаться занятой кораблём.)

5–5. Найдите трехзначное число, куб которого оканчивается на три семёрки. **(<u>753</u>, т.к. 753^3=426957777)**

5–6. Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD*. Известно, что *AD* = *BD* = *CD*, ∠*CBD* = ∠*BAC* и ∠*ADB* = ∠*ACD*. Найдите углы этого четырехугольника. **(<u>∠*A*=75°, ∠*B*=120°, ∠*C*=45°, ∠*D*=120°</u>. Пусть ∠*ADB* = ∠*ACD*=α, ∠*CBD* = ∠*BAC*=β. Треугольник *ADC* – равнобедренный (*AD*=*DC*), значит, ∠*CAD*=∠*ACD*=α=∠*ADB*. Треугольник *ADB* – равнобедренный (*AD*=*DB*), значит, ∠*ABD*==∠*DAB*=∠*DAC*+∠*BAC*=α+β, а сумма углов этого треугольника равна α+2(α+β)=3α+2β=180° (1). Треугольник *CDB* – равнобедренный (*CD*=*DB*), значит, ∠*DCB*=∠*CBD*=β. Пусть *P* – точка пересечения диагоналей, тогда ∠ *DPC* – внешний для треугольников *ADP* и *BCP*, т.е. он равен ∠*PAD*+∠*PDA*=2α=∠*PBC*+∠*PCB*=β+(β–α), откуда находим 3α=2β. Подставим это условие в (1) и получим, что 6α=180°, α=30°, β=45°. Теперь найдём углы четырёхугольника.)**



6–6. Какое наибольшее количество различных подмножеств (отличных от *A*) множества *A* = {1, 2, ..., 100} можно выбрать таким образом, что объединение любых трёх выбранных множеств есть *A*? **(<u>150 подмножеств</u>. <u>*Пример*</u>: все 100 подмножеств, в которых нет ровно одного элемента, и 50 подмножеств без двух элементов (без 1-2, без 3-4, …, без 99-100). Тогда любой элемент отсутствует ровно 2 раза, значит, объединение любых трёх подмножеств содержит все элементы, т.е. является множеством *A*. <u>*Доказательство оценки*</u>: Назовём *весом* выбранного подмножества количество не входящих в него элементов из *A*. Предположим, что у нас суммарный вес не меньше 201, значит, по принципу Дирихле некоторый элемент (из 100) не входит хотя бы в три подмножества. Тогда объединение этих подмножеств его не содержит – противоречие. Значит, суммарный вес всех подмножеств не более 200. Пусть у нас *a* подмножест без одного элемента и *b* подмножеств, в которых нет хотя бы двух элементов, значит, минимум суммарного веса *a*+2*b*≤200. Если *a*+*b*≥151, то *b*=(*a*+2*b*)–(*a*+*b*)≤200–151=49 и *a*≥151–*b*≥151–49=102, что невозможно, т.к. *a*≤100. Значит, подмножеств, отличных от *A*, не более 150.)**