Игра «Домино». ***Старшая лига (10-11 класс).*** **Решения. 09.09.2017**

	ф	ф			
					ф
					ф
ф					
ф					
			ф	ф	

0–0. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на доске 6×6 так, чтобы каждый ферзь бил ровно одного ферзя? Приведите ответ и пример. **(8 ферзей – см. расстановку методом «пропеллера». *Доказательство оценки методом рядов*: Ферзи разбиваются на пары, каждая из которых находится хотя бы в трёх различных рядах (строках и столбцах) из 12 возможных. Тогда всего не более 12:3=4 пар ферзей, т.е. всего не более 2·4=8 ферзей. *Доказательство оценки методом стенок:* каждый ферзь бьёт хотя бы 3 своих стенки из 4·6=24 возможных, значит, ферзей не более 24:3=8.)**

0–1. Найдите коэффициент b квадратного трехчлена x^2+bx+3, имеющего ровно 1 корень. **($b=\pm 2\sqrt{3}$, т.к. трехчлен x^2+bx+3 должен оказаться полным квадратом $(x\pm\sqrt{3})^2$)**

0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2
0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2
0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2

0–2. При каком наибольшем n в таблицу из пяти строк и n столбцов можно вписать числа 0, 1 или 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы? **(11, т.к. суммы в столбцах могут принимать только 11 различных целых значений – от 0 до 10=5·2. Пример – см. таблицу.)**

0–3. Найдите наименьшее натуральное n такое, что n^2+p не является простым ни для какого простого p. **(5. $1^2+2=3$, $2^2+3=7$, $3^2+2=11$, $4^2+3=19$ – простые числа, значит, $n\geq 5$. $5^2+2=27$, 5^2+p – чётное, не меньшее 28, при нечётных простых p, значит, 5 подходит.)**

0–4. Обозначим через $d(X, YZ)$ расстояние от точки X до прямой YZ. Точка P внутри треугольника ABC такова, что отношения $d(A, BC)/d(P, BC)$, $d(B, CA)/d(P, CA)$ и $d(C, AB)/d(P, AB)$ равны. Найдите их значение. **(3. Данные отношения есть отношения высот треугольника ABC, проведённых к сторонам BC, CA и AB, и высот треугольников PBC, PCA, PAB, проведённых из точки P к этим же сторонам, что равно отношениям площади треугольника ABC к площадям этих треугольников. Значит, площади этих треугольников равны между собой и равны 1/3 площади ABC, следовательно, данные отношения равны 3.)**

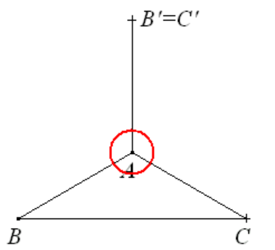
0–5. При каких значениях параметра p система неравенств $\begin{cases} x\geq (y-p)^2, \\ y\geq (x-p)^2 \end{cases}$ имеет единственное решение?

($p=-1/4$. Если (x_0, y_0) – решение системы, то (y_0, x_0) – тоже решение системы, значит, $x_0=y_0$. Тогда решаем квадратное неравенство $x\geq(x-p)^2$, дискриминант которого равен $D=4p+1$, значит, единственное решение система будет иметь только в случае $D=0$, т.е. при $p=-1/4$.)

0–6. При каких n среди всех n-значных чисел больше половины составляют числа, содержащие в своей десятичной записи хотя бы 1 ноль? **(При натуральных $n\geq 8$. Среди $9\cdot 10^{n-1}$ всех n-значных чисел ровно 9^n чисел, не содержащих нулей, значит, должно выполняться неравенство $\dfrac{9^n}{9\cdot 10^{n-1}}<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}<\dfrac{1}{2}$. Заметим, что $(0{,}9)^7=0{,}4782969<0{,}5<0{,}531441=(0{,}9)^6$, значит, $(n-1)\geq 7$.)**

1–1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x-a^2}=\sqrt{x}-a$ имеет единственное решение? **($a>0$. После возведения в квадрат и очевидных преобразований получим, что $a\sqrt{x}=a^2$. При $a=0$ исходное уравнение будет иметь бесконечно много решений. Значит, $\sqrt{x}=a>0$.)**

1–2. Действительные числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2+c^2=2000$ и $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=2017$. Найдите $a+b+c$. **($\pm\sqrt{17}$. $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2$, значит, $a+b+c=\pm\sqrt{2017-2000}=\pm\sqrt{17}$.)**



1–3. Вершины треугольника ABC отобразили симметрично относительно противоположных сторон, при этом образы точек B и C совпали. Найдите углы треугольника. **(120°, 30°, 30°. В силу совпадения образов $AB=AB'=AC'=AC$, значит, треугольник ABC – равнобедренный. Кроме того, в силу симметрии $\angle BAC=\angle B'AC=\angle C'AB$, а в сумме они дают 360°, значит, каждый из этих углов равен 120°.)**

1–4. Приведите пример четырёхугольника, у которого тангенсы всех внутренних углов равны. **(Это четырёхугольник, у которого три угла равны 45°, а четвёртый – 225°, тогда тангенсы всех его углов равны 1.)**

1–5. Найдите наибольшее количество сторон невыпуклого многоугольника, у которого ровно 8 внутренних углов больше 90°. **(27. Пусть всего n вершин, тогда сумма углов равна $(n-2)\cdot 180°$, что меньше $8\cdot 360°+(n-8)\cdot 90°$, т.к. ровно 8 углов будут больше 90°, но меньше 360°, а остальные $(n-8)$ углов не превосходят 90°. Из данного неравенства находим $n<28$. При этом можно построить невыпуклый 27-угольник, у которого ровно 8 углов больше 90°.)**

1–6. В компании из 300 человек каждый знаком ровно с тремя другими. При каком наименьшем k про такую компанию можно наверняка утверждать, что среди любых k человек найдутся двое знакомых? **(151. Если среди**

них не найдётся пары знакомых, то эти 151 человек имеют 151·3=453 знакомств с остальными, у которых в сумме не более 149·3=447 знакомств, что меньше уже имеющихся 453 знакомств с ними. Противоречие. Если k≤150, то в качестве контр-примера подойдёт компания – двудольный граф, в котором люди вершины разбиты на 50 компонент связности по 6 вершин, где каждая компонента является полным двудольным графом $K_{3,3}$. Тогда выбрав k людей из одной доли, получим группу без знакомых.)

2–2. Найдите все квадратные трехчлены ax^2+bx+c, у которых коэффициенты a, b, c и корни x_1, x_2 образуют (в некотором порядке) множество из пяти последовательных натуральных чисел. **(<u>Таких трехчленов нет</u>. Если бы все три коэффициента трехчлена были натуральными числами, то корни должны быть отрицательными числами, что противоречит условию.)**

2–3. Десятизначное число назовём *хитрым*, если все его цифры – единицы, двойки и тройки, а разность каждых двух соседних цифр равна 1. Найдите сумму всех хитрых чисел. **(<u>2^7·1111111111=142222222208</u>. В хитром числе чередуются 2 и нечётная цифра (1 или 3). Всего хитрых чисел $2\cdot2^5=2^6$, т.к. двойки можно поставить двумя способами (на чётные или нечётные по номерам места), а на остальных пяти местах 1 и 3 можно разместить 2^5 способами. Хитрые числа разбиваются на пары, дающие в сумме 4444444444, где в парных числах в одинаковых разрядах стоят двойки, а 1 и 3 дополняют друг друга, например, 1232323212+3212121232=4444444444. Значит, вся сумма равна 4444444444·2^6:2=2^7·11111111111.)**

2–4. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число a–2b натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок? **(<u>4 раскраски</u>. Пусть 1 – первого цвета, тогда нет самого большого нечётного числа 2n+1 первого цвета (где n – некоторое целое неотрицательное число), т.к. иначе его можно получить в виде a–2b=6n+7–2(2n+3)= 2n+1 из двух нечётных чисел a=6n+7 и b=2n+3 второго цвета – противоречие. А из каждого нечётного (большего 3) числа первого цвета мы получим число на 2·1=2 меньше также первого цвета. Отсюда следует, что все нечётные числа будут одного (первого) цвета. Аналогично нет самого большого чётного числа первого цвета. Значит, все чётные числа будут одного цвета – первого или второго. Тогда у нас 4 варианта раскраски двух одноцветных множеств (чётные и нечётные числа) в два цвета.)**

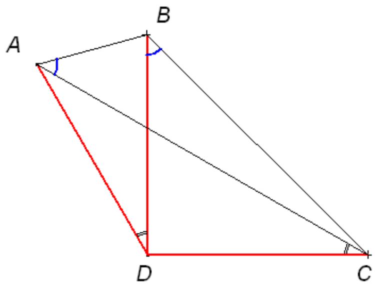
2–5. Даны таблица 10х10 клеток и N фишек. Рассматриваются все расстановки фишек в клетки таблицы, удовлетворяющие условию: никакие две фишки не стоят в соседних (по стороне) клетках. При каком наибольшем N в любой из расстановок можно найти хотя бы одну фишку такую, что от ее перемещения в соседнюю клетку заданное условие не нарушится? **(При <u>N = 9</u>. Заметим, что для 10 фишек существует расстановка (все фишки стоят на клетках большой диагонали), не удовлетворяющая условию задачи, – перемещение любой фишки в соседнюю клетку нарушает требуемое условие. Назовём расстановку фишек "жесткой", если перемещение любой фишки в соседнюю клетку нарушает требуемое условие. Докажем, что любая расстановка, в которой меньше, чем 10 фишек, не является "жесткой". Пусть существует "жесткая" расстановка, тогда в таблице найдутся пустые столбцы (s штук). Два пустых столбца не могут быть соседними и пустой столбец не может быть крайним, иначе можно будет передвинуть фишку. Значит, слева от пустого столбца есть хотя бы одна фишка, которую нельзя сдвинуть вправо в этот пустой столбец, т.е. в той же строке справа от пустого столбца стоит другая фишка. Т.о., для каждой такой "левой" фишки найдется "правая" фишка, стоящая в той же строке. "Левых" фишек не меньше, чем s , следовательно и "правых" фишек– не меньше, чем s . Поскольку всего фишек не больше, чем 9, то они занимают не более, чем (9–s) строк, следовательно, не менее, чем 10–(9–s)=s+1 строк останутся свободными. Так как s+1>s, то тем самым доказано, что свободных строк в таблице больше, чем свободных столбцов. Поскольку столбцы и строки в таблице равноправны, то, рассуждая аналогично, можно доказать, что количество пустых столбцов строго больше, чем количество пустых строк. Такое противоречие показывает, что наше предположение неверно, и любая расстановка, в которой меньше, чем 10 фишек, "жесткой" не является.)**

2–6. В однокруговом футбольном турнире участвовало N команд. За победу давалось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. При этом любые три команды в играх между собой набрали разное количество очков. Каково наибольшее число ничьих могло быть в этом турнире? **($\left[\frac{N^2}{4}\right]$. <u>*Пример*</u>: разобьём команды на две группы «пополам» (в чётном случае будет поровну команд, в нечётном случае – в одной группе будет на одну команду больше, чем во второй). Пронумеруем в каждой группе команды по порядку. Пусть команды разных групп сыграют между собой вничью, а в самой группе пусть команда с меньшим номером всегда выигрывает у команды с большим номером. Тогда в любой тройке команд одной группы будет набрано 4, 2 и 0 очков, а в тройке из двух команд одной группы и одной команды другой группы будет набрано 3, 1 и 2 очка. <u>*Доказательство оценки*</u>: Рассмотрим граф ничьих. Тогда по теореме Турана при количестве ничьих, большем чем $\left[\frac{N^2}{4}\right]$, обязательно найдётся треугольник ни-**

чьих, т.е. найдётся тройка команд, сыгравших между собой все три матча вничью и набравших по 2 очка, что противоречит условию.)

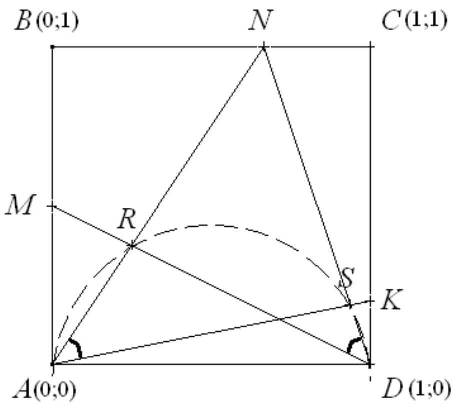
3–3. На доске записаны все девятизначные натуральные числа, десятичная запись которых содержит каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее среди записанных на доске чисел и стирают. Какая пара чисел будет стёрта последней? **(<u>549876321 и 561234789</u>. На доске записано по 8! чисел, начинающихся с 1, 2, …, 9. Поэтому после 4×8! стираний на ней останутся в точности все числа, начинающиеся с пятерки. Сотрём все начальные пятерки — порядок чисел от этого не изменится. Останется по 7! чисел, начинающихся с 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9. Последними, очевидно, будут стерты самое больше число, начинающееся на 4: 49876321 и самое маленькое, начинающееся на 6: 61234789. Вернув стертые пятерки, получаем ответ.)**

3–4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $AD = BD = CD$, $\angle CBD = \angle BAC$ и $\angle ADB = \angle ACD$. Найдите углы этого четырехугольника. **(<u>$\angle A$=75°, $\angle B$=120°, $\angle C$=45°, $\angle D$=120°</u>. Пусть $\angle ADB = \angle ACD=\alpha$, $\angle CBD = \angle BAC=\beta$. Треугольник ADC – равнобедренный ($AD=DC$), значит, $\angle CAD=\angle ACD=\alpha=\angle ADB$. Треугольник ADB – равнобедренный ($AD=DB$), значит, $\angle ABD==\angle DAB=\angle DAC+\angle BAC=\alpha+\beta$, а сумма углов этого треугольника равна $\alpha+2(\alpha+\beta)=3\alpha+2\beta=180°$ (1). Треугольник CDB – равнобедренный ($CD=DB$), значит, $\angle DCB=\angle CBD=\beta$. Пусть P – точка пересечения диагоналей, тогда $\angle DPC$ – внешний для треугольников ADP и BCP, т.е. он равен $\angle PAD+\angle PDA=2\alpha=\angle PBC+\angle PCB=\beta+(\beta–\alpha)$, откуда находим $3\alpha=2\beta$. Подставим это условие в (1) и получим, что $6\alpha=180°$, $\alpha=30°$, $\beta=45°$. Теперь найдём углы четырёхугольника.)**

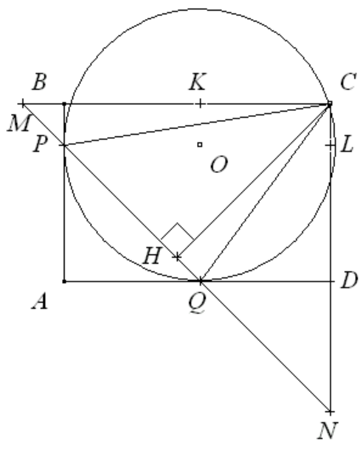


3–5. Для каждой пары натуральных чисел a, b введена операция $a\oplus b$ с такими свойствами: 1) $a\oplus a = a+2$; 2) $a\oplus b = b\oplus a$; 3) $\dfrac{a\oplus(a+b)}{a\oplus b}=\dfrac{a+b}{b}$. Найдите $3\oplus 5$. **(<u>45</u>.** $1\oplus 1=1+2=3$, $\dfrac{1\oplus 2}{1\oplus 1}=\dfrac{1\oplus(1+1)}{1\oplus 1}=\dfrac{1+1}{1}=2$, $1\oplus 2=2\cdot(1\oplus 1)=2\cdot 3=6$, $\dfrac{2\oplus 3}{1\oplus 2}=\dfrac{2\oplus(2+1)}{2\oplus 1}=\dfrac{2+1}{1}=3$, $2\oplus 3=3\cdot(1\oplus 2)=3\cdot 6=18$, $\dfrac{3\oplus 5}{2\oplus 3}=\dfrac{3\oplus(3+2)}{3\oplus 2}=\dfrac{3+2}{2}=\dfrac{5}{2}$, $3\oplus 5=\dfrac{5}{2}\cdot(2\oplus 3)=\dfrac{5}{2}\cdot 18=45$. ***<u>Комментарий:</u>* Фактически это задача про числа Фибоначчи.)**

3–6. На сторонах AB, BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены соответственно точки M, N и K так, что $AM:MB$=1:1, $BN:NC$=2:1, $CK:KD$=x:1. Отрезки AN и AK пересекаются с отрезками DM и DN соответственно в точках R и S так, что четырёхугольник $ARSD$ – вписанный. Найдите x. **(<u>x=4</u>. Покажем, что для x=4 условие задачи выполняется. Введём систему координат – A(0;0), B(0;1), C(1;1) и D(1;0). Тогда найдём координаты векторов AK и AN, рассмотрим их скалярное произведение и длины, откуда $\cos\angle KAN=\dfrac{\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AN}}{AK\cdot AN}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\angle KAN$=45°. Аналогично найдём $\angle MDN$=45°. Тогда отрезок RS виден из точек A и D под равным углом в 45°, при этом точки A и D находятся в одной полуплоскости относительно прямой RS, значит, точки A, R, S и D лежат на одной окружности, т.е. четырёхугольник $ARSD$ – вписанный. Если же x≠4, то точка S займёт другое положение на отрезке DN и уже не будет находиться на окружности, описанной около треугольника ARD, т.е. четырёхугольник $ARSD$ не будет вписанным.)**



4–4. Через вершину C прямоугольника $ABCD$ проведена окружность, касающаяся сторон AB и AD в точках P и Q. В треугольнике CPQ высота CH=1. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$. **(<u>1</u>. Пусть O — центр данной в условии окружности. Легко видеть, что $OPAQ$ — квадрат со стороной, равной радиусу R окружности. Продолжим прямую PQ до пересечения с прямыми BC в точке M и CD в точке N. Треугольники PAQ, MCN, MBP и NDQ — прямоугольные равнобедренные. Заметим, что $PB^2+QD^2 = OK^2+OL^2 = OC^2 = OP^2 = AP^2$, где K и L — основания перпендикуляров, опущенных из O на BC и CD соответственно. Это значит, что $S(MBP)+S(NDQ) = (PB^2+QD^2)/2 = AP^2/2 = S(PAQ)$, откуда $S(ABCD) = S(MCN)–S(MBP)–S(NDQ)+S(PAQ) = S(MCN) = CH^2 = 1$.)**



4–5. Петя расставил на поле 9×9 комплект, состоящий из 1 корабля 1×5, 2 кораблей 1×4, 3 кораблей 1×3, 4 кораблей 1×2 и 5 кораблей 1×1 (корабли не могут соприкасаться между собой). Какое наибольшее количество выстрелов может сделать Вова, чтобы гарантированно не попасть ни в один из кораблей? Приведите ответ и пример. **(<u>4 выстрела, в клетки, соседние по диагонали с угловыми клетками</u>. Данный комплект кораблей занимает ровно 100 узлов (12+2·10+3·8+4·6+5·4), а их на поле также ровно 100=10·10, значит, все узлы будут заняты, в том числе и угловые. Тогда клетки, соседние по диагонали с угловыми, будут свободны – в них и может выстрелить Вова. Остальные же клетки могут быть заняты, что видно из двух вариантов расстановки кораблей. Все клетки нечётных по номерам строк и столбцов могут быть закрыты при комбинациях перестановки рядов с рис.1, а все клетки четвёртого ряда (от какого-либо края) могут оказаться закрытыми при перестановках и поворотах расстановки на рис.2 (где в этом главную роль играет корабль 1×5). Таким образом, любая из остальных клеток, кроме 4-х указанных, могла оказаться занятой кораблём.)**

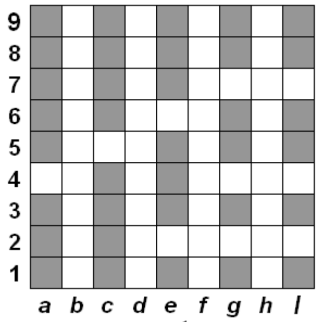


рис.1

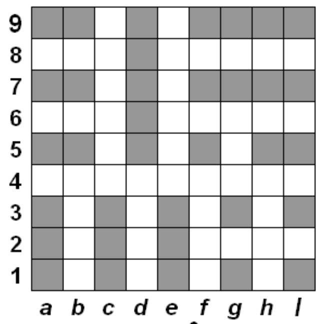
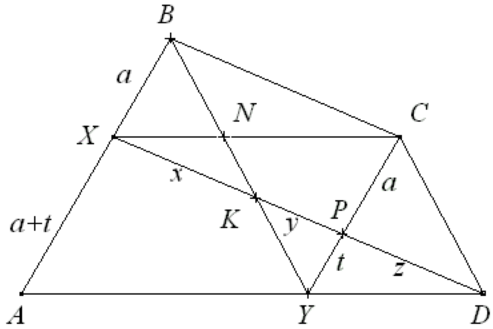


рис.2

4–6. Точки X и Y лежат на сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Найдите $AX:BX$, если $CX \parallel DA,\quad DX \parallel CB,\quad BY \parallel CD,\quad CY \parallel BA.$ **($\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Пусть $AX=CY=a+t$, $BX=CP=a$, $XK=x$, $KP=y$, $PD=z$ (см. рис.) Тогда с учётом подобия и параллельности получим, что**



$$\frac{AX}{BX}=\frac{a+t}{a}=1+\frac{t}{a}=1+\frac{YP}{PC}=1+\frac{DP}{PX}=1+\frac{z}{x+y}=\frac{x+y+z}{x+y},$$

$$\frac{AX}{BX}=\frac{a+t}{a}=\frac{CY}{BX}=\frac{CN}{NX}=\frac{DK}{KX}=\frac{y+z}{x}.$$

Значит, $\frac{AX}{BX}=\frac{a+t}{a}=\frac{x+y+z}{x+y}=\frac{y+z}{x}=\frac{(x+y+z)-(y+z)}{(x+y)-x}=\frac{x}{y}=\frac{XK}{KP}=\frac{BX}{PY}=\frac{a}{t}=p$ **(здесь мы воспользовались свойством ряда равных отношений), тогда** $p=\frac{a}{t}=\frac{a+t}{a}=\frac{\frac{a}{t}+1}{\frac{a}{t}}=\frac{p+1}{p}$**. Решаем уравнение** $p=\frac{p+1}{p}$ **и находим, что** $p=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$**.)**

5–5. Найдите трехзначное число, куб которого оканчивается на три семёрки. **(<u>753</u>, т.к. 753^3=426957777)**

5–6. Многочлен ax^3+bx^2+cx при целых значениях x принимает только целые значения. При каких ненулевых a такое возможно? **(<u>$a=z/6$, где z – целое ненулевое число</u>. Пусть $f(x)=ax^3+bx^2+cx$. Заметим, что** $g(x)=f(x+1)-f(x)=a(3x^2+3x+1)+b(2x+1)+c,\qquad h(x)=g(x+1)-g(x)=6ax+(6a+2b),$ $r(x)=h(x+1)-h(x)=6a$**. Поскольку при целых x $f(x)$ принимает только целые значения, то этим же свойством обладают $g(x)$, $h(x)$, $r(x)$. Значит, $6a=r(x)$ – целое число. При этом для каждого такого a можно привести пример многочлена с требуемым свойством:** $\frac{z}{6}x^3-\frac{z}{6}x=\frac{z(x-1)x(x+1)}{6}$**, что является целым числом при любом целом x, т.к. произведение трёх подряд идущих целых чисел $(x-1)x(x+1)$ обязательно делится на 6.)**

6–6. Какое наибольшее количество различных подмножеств (отличных от A) множества $A=\{1, 2, ..., 100\}$ можно выбрать таким образом, что объединение любых трёх выбранных множеств есть A? **(<u>150 подмножеств</u>. *<u>Пример</u>*: все 100 подмножеств, в которых нет ровно одного элемента, и 50 подмножеств без двух элементов (без 1-2, без 3-4, …, без 99-100). Тогда любой элемент отсутствует ровно 2 раза, значит, объединение любых трёх подмножеств содержит все элементы, т.е. является множеством A. *<u>Доказательство оценки</u>*: Назовём *весом* выбранного подмножества количество не входящих в него элементов из A. Предположим, что у нас суммарный вес не меньше 201, значит, по принципу Дирихле некоторый элемент (из 100) не входит хотя бы в три подмножества. Тогда объединение этих подмножеств его не содержит – противоречие. Значит, суммарный вес всех подмножеств не более 200. Пусть у нас a подмножеств без одного элемента и b подмножеств, в которых нет хотя бы двух элементов, значит, минимум суммарного веса $a+2b\le200$. Если $a+b\ge151$, то $b=(a+2b)-(a+b)\le200-151=49$ и $a\ge151-b\ge151-49=102$, что невозможно, т.к. $a\le100$. Значит, подмножеств, отличных от A, не более 150.)**