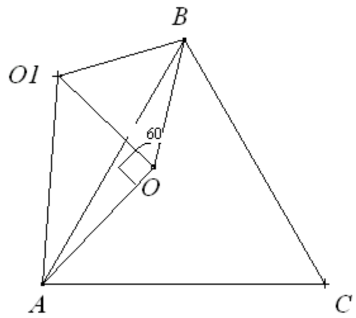
XIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». X Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль».

<u>Младшая лига.</u>* <u>Решения</u>. *10 сентября 2017 года



1. Внутри правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $AO^2+BO^2=CO^2$. Найдите угол AOB. (**<u>150°</u>. Выберем точку O_1 так, чтобы BOO_1 был правильным треугольником и точки O_1 с C находились по разные стороны относительно прямой *BO*. Треугольники BOC и ABO_1 равны, так как $AB=BC$ (по условию), $BO=BO_1$ (по постр.), $\angle OBC=\angle O_1BA$ (дополняются одним и тем же углом до 60°). Следовательно $AO_1=OC$. Но по условию $AO^2+OO_1^2=AO^2+BO^2=CO^2=AO_1^2$. Поэтому AOO_1 прямоугольный треугольник и $\angle AOB=90^\circ+60^\circ=150^\circ$.)**

2. Вася ставит по очереди в клетки шахматной доски по одному числа 1 и 2 так, чтобы 1 и 2 не стояли в соседних (по стороне) клетках. Найдите наибольшее *n* такое, что на доске окажется *n* единиц и *n* двоек. Приведите ответ и пример. **(<u>28</u> – см. рисунок)**

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
				1	1	1	1
2	2	2	2				
2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2

3. Укажите какую-нибудь тройку рациональных ненулевых различных чисел a, b и c таких, что $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. *Ответ подтвердите выкладками.* **(например, подходит тройка 7/4, –5/4, 1/4)**

4. Параллельно каждой из сторон квадрата провели по 9 прямых, в результате стороны квадрата оказались разбиты на отрезки натуральной длины. Рассматриваются все 55^2 прямоугольников со сторонами, лежащими на сторонах квадрата и проведенных прямых. Какое наибольшее количество из этих прямоугольников может иметь нечётную площадь? (**<u>900</u>. Введём систему координат на каждой стороне квадрата, считая, что у самой левой нижней точки квадрата будет координата 0 по обоим направлениям, тогда у всех остальных точек разбиения на каждой стороне координаты будут натуральными числами, т.к. длины всех отрезков – натуральные числа. Рассмотрим каждую сторону в отдельности. Пусть *n* точек будут с нечётными координатами, значит, (11–*n*) точек будут с чётными координатами, тогда будет ровно *n*(11–*n*) отрезков с нечётными длинами. Тогда перебор всех случаев показывает, что наибольшее количество отрезков будет равно 30 при *n*, равном либо 5, либо 6. Значит, наибольшее количество нечётных площадей ($900=30^2$) будет тогда, когда по обеим сторонам мы получим по 30 отрезков нечётной длины. В качестве примера подойдёт набор точек с целыми координатами от 0 до 10 по обоим направлениям, когда на каждом из них ровно 5 точек имеют нечётные и ровно 6 точек имеют чётные координаты, следовательно, ровно 5·6=30 нечётных отрезков с концами в парах точек разной чётности и ровно 30·30=900 прямоугольников с нечётной площадью (когда обе стороны прямоугольника – нечётные).)**

5. Найдите три трехзначных числа, для записи которых использовано девять различных цифр, при этом произведение этих трёх чисел оканчивается пятью нулями и является минимально возможным. (**<u>625·384·170=40800000</u>. В разложении на простые множители обязательно должно быть 5 пятёрок и хотя бы 5 двоек, значит, одно число равно $625=5^4$ и одно число $\overline{ab0}$ должно оканчиваться на 0, что даёт нам ещё 1 пятёрку и двойку. Значит, двузначное число $\overline{ab}$ и оставшееся трёхзначное число $\overline{cde}$ должны дать ещё 4 двойки. Этого надо добиться, выбрав некоторые 5 цифр из 6 оставшихся {1, 3, 4, 7, 8, 9}. Оба чётными они быть не могут, т.к. тогда каждое из них даст только по одной двойке. Значит, либо вариант двузначного $48 \vdots 2^4$, либо трехзначных $384 \vdots 2^4$ и $784 \vdots 2^4$. Тогда в этих случаях наименьшие произведения будут равны 625·480·137=41100000, 625·384·170=40800000, 625·784·130=63700000, откуда и найдём самое маленькое.)**

6. Натуральные числа a и b ($a \le b$) таковы, что для любых действительных чисел x и y, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le y \le b$, выполнено неравенство $a \le x/y+y/x \le b$. Найдите все такие пары чисел a и b. (**<u>a = 2, натуральное $b \ge 2$</u>. Полагая $x = y$, находим, что $a \le 2$. При этом $a \ne 1$, иначе при $x = 1$ и $y = b$ имеем $x/y+y/x = b+1/b > b$, что противоречит условию. Поэтому $a = 2$. Заметим, что $2 \le x/y+y/x$ при любых положительных x и y согласно неравенству Коши. Покажем,**

что при любых $b \geq 2$ и $2 \leq x \leq y \leq b$ выполнено неравенство $x/y+y/x \leq b$. Умножая на xy, получаем равносильное неравенство $x^2+y^2 \leq bxy$, верное, так как $bxy \geq xy^2 \geq 2y^2 \geq x^2+y^2$.)

7. Сколько существует 225-значных чисел с суммой цифр 2017? *Ответ дать в максимально упрощённом комбинаторном виде.* (**C_{232}^{8}. Заметим, что число из 224-х девяток имеет сумму цифр 2016, значит, каждое 225-значное число с суммой цифр 2017 получается из 225-значного числа из девяток вычитанием из него 225-значного числа с суммой цифр 8. Количество 225-значных чисел с суммой цифр 8 находится методом «шаров и перегородок» – 8 шариков раскидываем по 225 ящикам – кодирование 8 единицами-шариками и 224 нулями-перегородками – количество способов выбрать под единички 8 мест из 8+224=232 мест – C_{232}^{8}.)**

8. Какое наибольшее количество ферзей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый ферзь бил не более двух других ферзей? Приведите ответ и пример. **(<u>14 ферзей</u> – см.рис.2. Ферзь бьёт в 8 направлениях (4 стенки и 4 граничных узла), при этом всего существует 92 направления – 32 стенки, 4 угловых узла и по 2 направления на 28 граничных неугловых узлов. У ферзя перекрыты другими ферзями максимум 2 из 8 направлений, значит, каждый ферзь имеет не менее 6 своих направлений из 92 возможных. Следовательно, всего не более [92:6]=15 ферзей. Если бы было ровно 15 ферзей, то осталось бы ровно 2 свободных направления, при этом они оба окажутся направлениями на граничные неугловые узлы из одной угловой клетки (см. рис.1), т.к. все 4 угловых клетки одновременно быть занятыми не могут, иначе угловые ферзи уже бьют трёх других. Тогда аналогичные направления в других угловых клетках должны быть пробиты, т.е. три угловых клетки заняты (с точностью до симметрии можно считать, что ферзи в клетках *a*8, *h*1, *h*8). Эти ферзи уже бьют ферзей с двух направлений (необязательно других угловых), значит, остальные клетки вертикали *a* и горизонтали 1 свободны, значит, существуют ещё два свободных направления (на верхний левый узел клетки *a*2 и правый нижний узел клетки *b*1 – см. рис.2). Т.о., уже не менее 4 свободных направлений, значит, 15 ферзей быть не может, т.е. всего не более 14 ферзей.)**

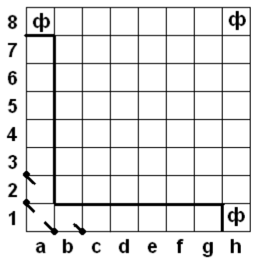


рис.1

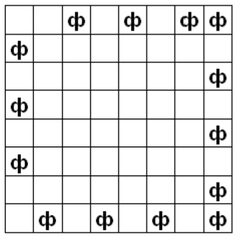


рис.2

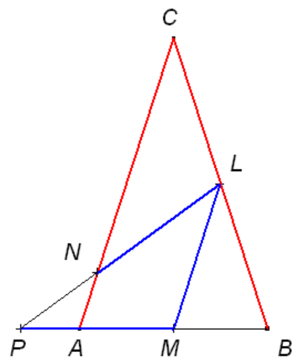
9. При каких значениях параметра *a* уравнение $x^2+y^2+z^2+t^2+a=x+y+z+t$ имеет единственное решение? **(<u>При *a*=1</u>. Перенесём всё в одну сторону и выделим сумму четырёх полных квадратов $(x-1/2)^2+(y-1/2)^2+(z-1/2)^2+(t-1/2)^2+a-1=0$, откуда и следует, что при $a>1$ – решений у уравнения нет, при $a=1$ – решение единственное – все числа равны 1/2, при $a<1$ – решений бесконечно много.)**

10. Найдите наименьшее десятизначное число из различных цифр, делящееся на 11. (**<u>1024375869</u>. Сумма цифр этого числа равна 45, а знакочередующаяся сумма цифр должны быть кратна 11 в силу признака делимости на 11, что возможно только тогда, когда она будет нечётной (иначе сумма цифр будет чётной), т.е. будет равна ±11 или ±33. Но в случае ±33 одна из сумм по 5 цифр (на чётных или на нечётных местах) должна быть равна 6, а другая – 39, что невозможно, т.к. сумма пяти любых различных цифр будет не менее 0+1+2+3+4=10. Значит, знакочередующаяся сумма цифр равна ±11, а суммы на четных и нечётных местах равны 17 и 28 (или наоборот). Чтобы число было минимальным, оно должно начинаться с меньших цифр 1023… Предположим, что первые четыре цифры будут такими, тогда каждая из сумм будет не менее 3+4+5+6=18 (т.к. 1+2=0+3=3), т.е. не будет суммы 17. Значит, число начинается с 10243 …, тогда сумма 1+2+3 с ещё двумя цифрами будет не более 6+8+9=23 , т.е. будет равна 17, а эти две цифры будут 5 и 6. Следовательно, расставляя оставшиеся цифры минимальным образом, получим число 1024375869**.)

11. Поверхность куба 11×11×11 разбита на клетки 1×1. Муравей бегает по диагоналям клеток, нигде не поворачивая назад. Он не может бывать внутри одной клетки более одного раза, но может несколько раз проходить одну вершину. Какое наибольшее количество центров клеток мог посетить муравей? **(<u>715 клеток</u>. Покрасим вершины клеток в два цвета в шахматном порядке. Тогда каждая диагональ будет соединять две одноцветных вершины, и муравей сможет бегать только через вершины одного цвета (пусть они белые). Все эти вершины, кроме четырёх вершин куба — чётные. Возьмём максимальный маршрут муравья и сотрём все входящие**

в него ребра. Тогда по крайней мере из двух белых вершин будет выходить нечётное число нестёртых ребер. При этом хотя бы две такие вершины попадут в одну компоненту связности нестёртой части «белого» графа. Соединяющий их в этой компоненте маршрут имеет длину не менее 11, поэтому существует по крайней мере 11 не посещённых муравьем центров клеток, то есть муравей посетил не более $6\cdot 11^2$–11 = 715 центров клеток. При этом маршрут в 715 клеток существует, т.к. можно убрать путь ровно из 11 рёбер между двумя нечётными вершинами. Тогда у нас останется связный граф с двумя нечётными вершинами и 715 рёбрами, в котором существует эйлеров путь, концами которого и будут эти две нечётные вершины.)

12. Точки M и L — середины сторон AB и BC соответственно равнобедренного треугольника ABC ($BC = AC$). Точка N на стороне AC такова, что $NA+AM = LN = LM$. Найдите угол NLM. **(36°. Пусть $\angle CAB=\angle ABC=\angle LMB=2\alpha$ (AC и средняя линия ML параллельны). Отметим на луче BA за точкой A такую точку P, что $MP=ML$, а тогда $AP=PN$. Из равнобедренности подобных треугольников PAN и PML ($\angle PAN=\angle PML$ в силу параллельности AC и средней линии ML) следует, что точки P, N и L лежат на одной прямой ($\angle APN=\angle MPL=\alpha$). Тогда $\angle ACB=180°–4\alpha$ (из треугольника ABC)$=\angle LNC$ (в силу равенств $LN=LM=AC/2=BC/2=CL$)$=\angle PNA$ (вертикальные углы)$=\alpha$. Из уравнения $180°–4\alpha=\alpha$ находим $\alpha=36°$, но $\angle NLM=\alpha$, значит, он равен 36°.)**



13. В стране несколько городов. Между любыми двумя городами проложена одна дорога. Три турфирмы предлагают путешественникам маршруты, проходящие по всем городам (возможно, и не по одному разу и не обязательно заканчивающихся в начальном городе). Оказалось, что ни одна дорога не входит более чем в один маршрут. Какое наименьшее число городов может быть в стране? **(6. Пусть в стране n городов, тогда каждый маршрут содержит хотя бы (n–1) дорогу, т.к. каждый маршрут является компонентой связности с n вершинами-городами, значит, в этой компоненте связности рёбер-дорог не меньше, чем в остовном дереве (скелете) этой компоненты связности, т.е. не меньше (n–1) ребра-дороги. Тогда всего дорог не менее 3(n–1), но их в полном графе на n вершин ровно $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Значит, $\dfrac{n(n-1)}{2}\geq 3(n-1)$, откуда $n\geq 6$.**

В качестве примера подойдут маршруты *ABCDEF, ACEBDF, DAEAFBFC*.)

14. Прямоугольник 4×100 разбит на доминошки (прямоугольники 1×2). Какое наименьшее количество точек может оказаться вершинами доминошек? **(255 точек. Нужные нам точки являются узлами клетчатой решётки (всего их 5·101=505). Найдём наибольшее возможное количество из этих узлов, не являющихся вершинами доминошек (всего у нас 2·100=200 доминошек), такие узлы назовём *свободными*. Заметим, что свободный узел является концом перегородки внутри доминошки, причём либо этот узел лежит на краю прямоугольника, либо на стыке двух перегородок. Т.о., свободные узлы входят в цепочки из перегородок, причём в случае, если блок из n доминошек (прямоугольник 2×n) находится между противоположными краями прямоугольника (блоки 2×4 или 2×100 при n соответственно равных 4 и 100), то мы получим соответственно 5 или 101 свободный узел, т.е. n+1 (см. рис. 1 при n=4). Если же блок будет другого размера, то он даст нам либо n, либо n–1 свободный узел в случаях выхода блока на одну границу прямоугольника (см. пример на рис. 2 при n=3) или когда оба края блока со стороны 2 находятся внутри прямоугольника (см. пример на рис. 3 при n=2). Значит, наибольшее количество свободных узлов мы получим при наибольшем возможном числе блоков 2×4, на каждом из которых мы получаем дополнительный свободный узел, а это 50 блоков при горизонтальном разбиении на доминошки вдоль длинной стороны в 100 клеток (см. рис. 1). Тогда наибольшее количество свободных узлов равно сумме количества доминошек (200) и максимального количества блоков 2×4 (50). Всего получаем 250=200+50 свободных узлов и соответственно минимум 255=505–250 узлов, являющихся вершинами доминошек. Пример такого количества нужных нам точек приведён выше (рис.1).)**

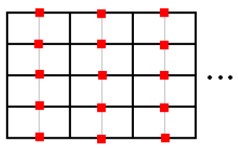


рис. 1

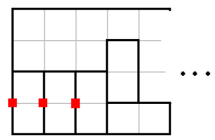


рис. 2

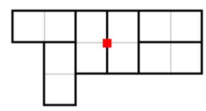
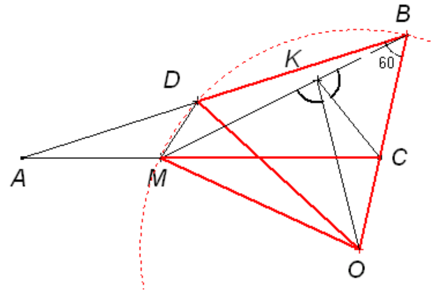
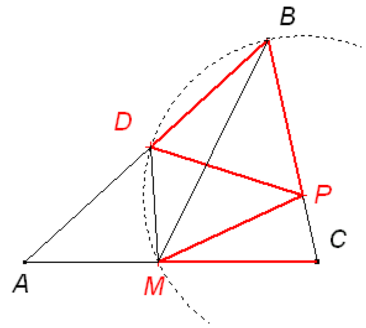


рис. 3

15. На стороне AC треугольника ABC с углом $\angle B = 60°$ выбрана точка M такая, что $\angle BCA = 2\angle MBC$, а на стороне AB — точка D такая, что $BD = MC$. Найдите $\angle DMB$. **(<u>30°</u>. *<u>Решение 1</u>*: Отметим на луче BC точку O такую, что $OB=BD=MC=a$, причём нам неважно O лежит между B и C, или C лежит между B и O (см. рис.), или же O и C совпадают. Пусть K – такая точка на BM, что CK – биссектриса $\angle BCA$. Тогда треугольник BKC – равнобедренный ($\angle KBC=\angle KCB=\angle BCA/2$), а треугольники KBO и KCM равны ($\angle KBO=\angle KCM$, $KB=KC$, $BO=CM=a$). Значит, $KO=KM$, $\angle BKO=\angle CKM$, тогда $\angle BKC=\angle OKM$, а равнобедренные треугольники BKC и OKM будут подобны. Значит, $\frac{BC}{OM}=\frac{BK}{KM}$, но по свойству биссектрисы в треугольнике BCM имеем $\frac{BK}{KM}=\frac{BC}{CM}$, тогда $\frac{BC}{OM}=\frac{BC}{CM}$ и $OM=CM=a$. Тогда точка O равноудалена от точек B, D и M, значит, B, D и M лежат на окружности с центром в точке O, а вписанный $\angle DMB$ равен половине центрального $\angle DOB=60°$ (т.к. ΔDOB – равнобедренный с углом 60°, т.е. равносторонний), значит, $\angle DMB=30°$, что и требовалось доказать.**



<u>*Решение 2*</u>: Отметим на луче BC такую точку P, что треугольник MPC – равнобедренный ($CM=PM$, возможно, что точки P и C совпадают, причём нам неважно, какая из точек P и C будет ближе к B). Рассмотрим случай, когда P лежит между B и C (или совпадает с C) – см. рисунок (второй случай рассматривается аналогично), тогда $\angle MPC=\angle MCP=2\angle MBC$, но он внешний для ΔMPB, значит, $\angle MBP=\angle BMP$ и треугольник BMP – равнобедренный. Тогда $PB=PM=MC=BD=PD$ (т.к. ΔDPB – равнобедренный с углом 60°, т.е. равносторонний), следовательно, точки M, D, B лежат на окружности с центром P, а вписанный $\angle DMB$ равен половине центрального $\angle DPB=60°$, значит, $\angle DMB=30°$, что и требовалось доказать. *<u>Комментарий 1</u>*: Если в треугольнике один угол в два раза больше другого, то либо напрашивается провести биссектрису удвоенного угла и получить равнобедренный треугольник, либо напрашивается построить сразу два равнобедренных треугольника (как в решении 2). *<u>Комментарий 2</u>*: По чертежу достаточно очевидно, что $\angle DMB=30°$, значит, он половина 60°, тогда естественной является идея увидеть окружность, где этот угол опирается на дугу в 60°, а также напрашивается построить равносторонний треугольник.)



16. На доске написано натуральное число. Первую цифру сложили со второй, вторую с третьей, и так далее, предпоследнюю цифру сложили с последней, после чего эти числа выписали в строчку без пробелов, сохраняя порядок. С полученным числом проделали такую же операцию, и так далее (например, из 1568 получается 61114, а из него, в свою очередь, 7225). Найдите наименьшее число, из которого такими операциями нельзя получить однозначное число. **(<u>991</u>, из которого будем получать 1810→991→… . Из двузначного числа мы получим либо сразу однозначное, либо двузначное, не больше 18, из которого вторым ходом получим однозначное. Докажем, что из трёхзначного числа, не превосходящего 990, мы обязательно получим однозначное, значит, нужное нам число будет не меньше 991. Из трёхзначного числа $\overline{abc}$ мы получим $\overline{(a+b)(b+c)}$, которое будет либо 1) двузначным (этот случай описан выше), либо 2) трёхзначным вида $\overline{1(a+b-10)(b+c)}$, либо 3) трёхзначным вида $\overline{(a+b)1(b+c-10)}$, либо 4) четырёхзначным вида $\overline{1(a+b-10)1(b+c-10)}$, а затем сразу трёхзначным вида $\overline{(a+b-9)(a+b-9)(b+c-9)}$ (во всех трёх случаях в скобках стоят цифры). В последних трёх случаях мы получим не более чем за 2 шага трёхзначное число либо с меньшей суммой цифрой, значит, в некоторый момент придёт к случаю 1, либо сохраним сумму цифр при b=9. Тогда во втором случае c=0, в третьем – a=0 (невозможно), в четвёртом – a=9 (что даёт число не меньше 990, а 990→189→917→108→18→9 – не подходит, т.е. число должно быть не меньше 991). Второй же случай даёт $\overline{1(a+b-10)(b+c)}=\overline{1(a-1)9}\to\overline{a(a+8)}$ – либо двузначное число, либо трёхзначное число $\overline{a1(a-2)}$ с суммой цифр, меньшей, чем у $\overline{a90}$ (а случай уменьшения суммы цифр нами уже разобран). Значит, нужное нам число будет не меньше 991.)**