XIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». X Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль»***. Младшая лига. 10 сентября 2017 года***

**1.** Внутри правильного треугольника $ABC$ выбрана точка $O$ так, что $AO^2+BO^2=CO^2$. Найдите угол $AOB$.

**2.** Вася ставит по очереди в клетки шахматной доски по одному числа 1 и 2 так, чтобы 1 и 2 не стояли в соседних (по стороне) клетках. Найдите наибольшее $n$ такое, что на доске окажется $n$ единиц и $n$ двоек. Приведите ответ и пример.

**3.** Укажите какую-нибудь тройку рациональных ненулевых различных чисел $a$, $b$ и $c$ таких, что $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. *Ответ подтвердите выкладками*.

**4.** Параллельно каждой из сторон квадрата провели по 9 прямых, в результате стороны квадрата оказались разбиты на отрезки натуральной длины. Рассматриваются все $55^2$ прямоугольников со сторонами, лежащими на сторонах квадрата и проведенных прямых. Какое наибольшее количество из этих прямоугольников может иметь нечётную площадь?

**5.** Найдите три трехзначных числа, для записи которых использовано девять различных цифр, при этом произведение этих трёх чисел оканчивается пятью нулями и является минимально возможным.

**6.** Натуральные числа $a$ и $b$ ($a \le b$) таковы, что для любых действительных чисел $x$ и $y$, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le y \le b$, выполнено неравенство $a \le x/y+y/x \le b$. Найдите все такие пары чисел $a$ и $b$.

**7.** Сколько существует 225-значных чисел с суммой цифр 2017? *Ответ дать в максимально упрощённом комбинаторном виде.*

**8.** Какое наибольшее количество ферзей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый ферзь бил не более двух других ферзей? Приведите ответ и пример.

**9.** При каких значениях параметра $a$ уравнение $x^2+y^2+z^2+t^2+a=x+y+z+t$ имеет единственное решение?

**10.** Найдите наименьшее десятизначное число из различных цифр, делящееся на 11.

**11.** Поверхность куба $11\times11\times11$ разбита на клетки $1\times1$. Муравей бегает по диагоналям клеток, нигде не поворачивая назад. Он не может бывать внутри одной клетки более одного раза, но может несколько раз проходить одну вершину. Какое наибольшее количество центров клеток мог посетить муравей?

**12.** Точки $M$ и $L$ — середины сторон $AB$ и $BC$ соответственно равнобедренного треугольника $ABC$ ($BC = AC$). Точка $N$ на стороне $AC$ такова, что $NA+AM = LN = LM$. Найдите угол $NLM$.

**13.** В стране несколько городов. Между любыми двумя городами проложена одна дорога. Три турфирмы предлагают путешественникам маршруты, проходящие по всем городам (возможно, и не по одному разу и не обязательно заканчивающихся в начальном городе). Оказалось, что ни одна дорога не входит более чем в один маршрут. Какое наименьшее число городов может быть в стране?

**14.** Прямоугольник $4\times100$ разбит на доминошки (прямоугольники $1\times2$). Какое наименьшее количество точек может оказаться вершинами доминошек?

**15.** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ с углом $\angle B = 60°$ выбрана точка $M$ такая, что $\angle BCA = 2\angle MBC$, а на стороне $AB$ — точка $D$ такая, что $BD = MC$. Найдите $\angle DMB$.

**16.** На доске написано натуральное число. Первую цифру сложили со второй, вторую с третьей, и так далее, предпоследнюю цифру сложили с последней, после чего эти числа выписали в строчку без пробелов, сохраняя порядок. С полученным числом проделали такую же операцию, и так далее (например, из 1568 получается 61114, а из него, в свою очередь, 7225). Найдите наименьшее число, из которого такими операциями нельзя получить однозначное число.