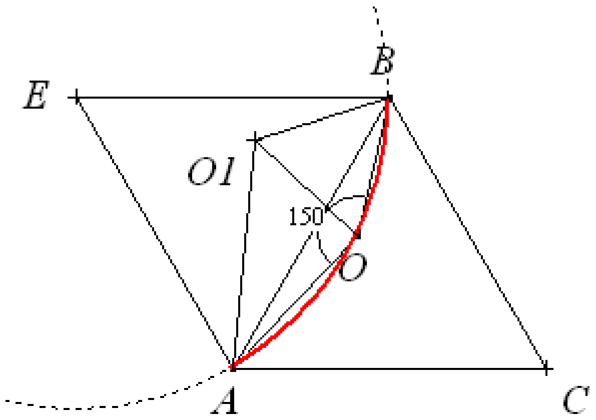
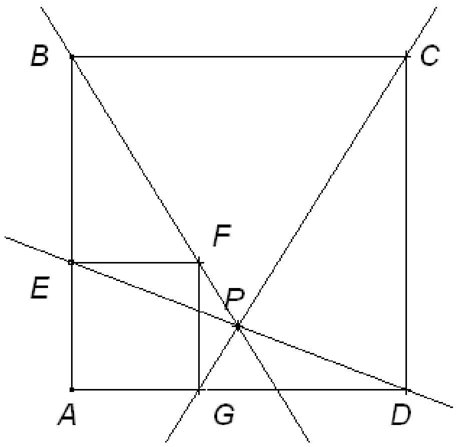
XIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». X Турнир математических игр. Математическая игра «Дуэль».

<u>Старшая лига.</u> **<u>Решения</u>. *10 сентября 2017 года***



1. Найдите геометрическое место точки O внутри правильного треугольника ABC такой, что $AO^2+BO^2=CO^2$. Опишите его и изобразите на чертеже. **(<u>Дуга AB (без концов) окружности, из точек которой отрезок AB виден под углом 150° (центр этой окружности точка E – четвёртая вершина ромба $ACBE$</u>). Выберем точку O_1 так, чтобы BOO_1 был правильным треугольником и точки O_1 с C находились по разные стороны относительно прямой BO. Треугольники BOC и ABO_1 равны, так как $AB=BC$ (по условию), $BO=BO_1$ (по постр.), $\angle OBC=\angle O_1BA$ (дополняются одним и тем же углом до 60°). Следовательно, $AO_1=OC$. Но по условию $AO^2+OO_1^2=AO^2+BO^2=CO^2=AO_1^2$. Поэтому по теореме Пифагора AOO_1 – прямоугольный треугольник и $\angle AOB=90^\circ+60^\circ=150^\circ$. И для любой точки такой дуги требуемое условие выполняется.)**

2. Дан квадратный трехчлен $f(x)=x^2+ax+b$. Известно, что для любого вещественного x существует вещественное y такое, что $f(y)=f(x)+y$. Найдите наибольшее возможное значение a. **(<u>a=1/2</u>. Из условия следует, что квадратное уравнение $f(y)–y–f(x)=0$ разрешимо относительно y при любом значении x. Подставив $x=–a/2$, получаем уравнение $y^2+(a–1)y+a^2/4=0$, дискриминант которого равен $D=(a–1)^2–a^2=1–2a\geq 0$, откуда $a\leq 1/2$. С другой стороны, если $a=1/2$, то при любом x можно положить $y=–x$: тогда имеем $f(y)–y–f(x)=(x^2–x/2+b)+x–(x^2+ x/2+b)=0$, что и требовалось. (Также подходит $y=x+1/2$.) <u>Замечание</u>. Легко понять, что при значении $x=–a/2$ достигается минимум дискриминанта трехчлена $f(y)–y–f(x)$. Поэтому, если при $x=–a/2$ он неотрицателен, то он неотрицателен всегда.)**



3. Укажите какую-нибудь тройку рациональных ненулевых различных чисел a, b и c таких, что $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. *Ответ подтвердите выкладками*. **(<u>например, подходит тройка 7/4, –5/4, 1/4</u>)**

4. На сторонах AB и AD единичного квадрата $ABCD$ взяты точки E и G, а внутри квадрата – точка F, при этом $AEFG$ также квадрат. Оказалось, что прямые BF, CG и DE пересекаются в одной точке. Найдите длину стороны квадрата $AEFG$. **($\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ - <u>квадрат «золотого» сечения</u>. Введём систему координат: $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$, $E(0;a)$ и т.д. Составим систему из трёх линейных уравнений (прямых BF, CG и DE) с тремя переменными и решим её.)**

5. Найдите три трехзначных числа, для записи которых использовано девять различных цифр, при этом произведение этих трёх чисел оканчивается пятью нулями и является минимально возможным. **(<u>625·384·170=40800000</u>. В разложении на простые множители обязательно должно быть 5 пятёрок и хотя бы 5 двоек, значит, одно число равно 625=5⁴ и одно число $\overline{ab0}$ должно оканчиваться на 0, что даёт нам ещё 1 пятёрку и двойку. Значит, двузначное число $\overline{ab}$ и оставшееся трёхзначное число $\overline{cde}$ должны дать ещё 4 двойки. Этого надо добиться, выбрав некоторые 5 цифр из 6 оставшихся {1, 3, 4, 7, 8, 9}. Оба чётными они быть не могут, т.к. тогда каждое из них даст только по одной двойке. Значит, либо вариант двузначного $48\vdots 2^4$, либо трехзначных $384\vdots 2^4$ и $784\vdots 2^4$. Тогда в этих случаях наименьшие произведения будут равны 625·480·137=41100000, 625·384·170=40800000, 625·784·130=63700000, откуда и найдём самое маленькое.)**

6. Натуральные числа a и b ($a \le b$) таковы, что для любых действительных чисел x и y, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le y \le b$, выполнено неравенство $a \le \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \le b$. Найдите все такие пары чисел a и b. (**<u>a = 2, натуральное $b \ge 2$</u>. Полагая $x = y$, находим, что $a \le 2$. При этом $a \ne 1$, иначе при $x = 1$ и $y = b$ имеем $x/y+y/x = b+1/b > b$, что противоречит условию. Поэтому $a = 2$. Заметим, что $2 \le x/y+y/x$ при любых положительных x и y согласно неравенству Коши. Покажем, что при любых $b \ge 2$ и $2 \le x \le y \le b$ выполнено неравенство $x/y+y/x \le b$. Умножая на xy, получаем равносильное неравенство $x^2+y^2 \le bxy$, верное, так как $bxy \ge xy^2 \ge 2y^2 \ge x^2+y^2$.)**

7. Сколько существует 225-значных чисел с суммой цифр 2017? *Ответ дать в максимально упрощённом комбинаторном виде.* (**C_{232}^{8}. Заметим, что число из 224-х девяток имеет сумму цифр 2016, значит, каждое 225-значное число с суммой цифр 2017 получается из 225-значного числа из девяток вычитанием из него 225-значного числа с суммой цифр 8. Количество 225-значных чисел с суммой цифр 8 находится методом «шаров и перегородок» – 8 шариков раскидываем по 225 ящикам – кодирование 8 единицами-шариками и 224 нулями-перегородками – количество способов выбрать под единички 8 мест из 8+224=232 мест – C_{232}^{8}.)**

8. Какое наибольшее количество ферзей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый ферзь бил не более двух других ферзей? Приведите ответ и пример. (**<u>14 ферзей</u> – см.рис.2. Ферзь бьёт в 8 направлениях (4 стенки и 4 граничных узла), при этом всего существует 92 направления – 32 стенки, 4 угловых узла и по 2 направления на 28 граничных неугловых узлов. У ферзя перекрыты другими ферзями максимум 2 из 8 направлений, значит, каждый ферзь имеет не менее 6 своих направлений из 92 возможных. Следовательно, всего не более [92:6]=15 ферзей. Если бы было ровно 15 ферзей, то осталось бы ровно 2 свободных направления, при этом они оба окажутся направлениями на граничные неугловые узлы из одной угловой клетки (см. рис.1), т.к. все 4 угловых клетки одновременно быть занятыми не могут, иначе угловые ферзи уже бьют трёх других. Тогда аналогичные направления в других угловых клетках должны быть пробиты, т.е. три угловых клетки заняты (с точностью до симметрии можно считать, что ферзи в клетках *a*8, *h*1, *h*8). Эти ферзи уже бьют ферзей с двух направлений (необязательно других угловых), значит, остальные клетки вертикали *a* и горизонтали 1 свободны, значит, существуют ещё два свободных направления (на верхний левый узел клетки *a*2 и правый нижний узел клетки *b*1 – см. рис.2). Т.о., уже не менее 4 свободных направлений, значит, 15 ферзей быть не может, т.е. всего не более 14 ферзей.)**

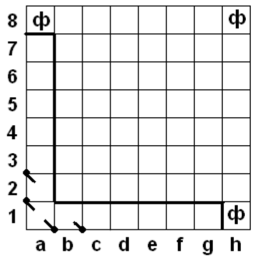


рис.1

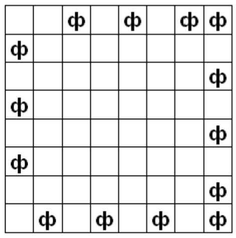


рис.2

9. Сколько существует пар натуральных чисел m и n ($m \le n$), что числа $\frac{m^2+2n}{n^2-2m}$ и $\frac{n^2+2m}{m^2-2n}$ – целые? (**<u>7 пар</u>. Из условия следует, что $m^2+2n \ge n^2-2m$, откуда $(m+1)^2 \ge (n-1)^2$. Значит, $n \le m+2$. Аналогично получаем, что $m \le n+2$. Тогда имеем три случая: $n=m$, $n=m+1$, $n=m+2$. В первом случае получаем, что $(m+2) \vdots (m-2)$, следовательно, $4 \vdots (m-2)$. Мы получаем, что в этом случае 4 решения (1,1), (3,3), (4,4), (6,6). Если $n=m+1$, то $(2m+1) \vdots (m^2+1)$, что возможно только при $m=2$, но это не является решением, т.к. вторая дробь не будет целым числом. Наконец, если $n=m+2$, то получаем, что $(8m+8) \vdots (m^2-2m-4)$. При $m>11$ это невозможно, т.к. второе число больше первого и оба они – натуральные. Остальные случаи переберём и получим ещё 3 ответа : (2,4), (3,5), (4,6).)**

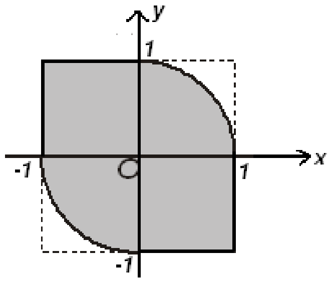
10. Найдите наименьшее десятизначное число из различных цифр, делящееся на 11. (**<u>1024375869</u>. Сумма цифр этого числа равна 45, а знакочередующаяся сумма цифр должны быть кратна 11 в силу признака делимости на 11, что возможно только тогда, когда она будет нечётной (иначе сумма цифр будет чётной), т.е. будет равна ±11 или ±33. Но в случае ±33 одна из сумм по 5 цифр (на чётных или на нечётных местах) должна быть равна 6, а другая – 39, что невозможно, т.к. сумма пяти любых различных цифр будет не менее 0+1+2+3+4=10. Значит, знакочередующаяся сумма цифр равна ±11, а суммы на четных и нечётных местах равны**

17 и 28 (или наоборот). Чтобы число было минимальным, оно должно начинаться с меньших цифр 1023… Предположим, что первые четыре цифры будут такими, тогда каждая из сумм будет не менее 3+4+5+6=18 (т.к. 1+2=0+3=3), т.е. не будет суммы 17. Значит, число начинается с 10243 …, тогда сумма 1+2+3 с ещё двумя цифрами будет не более 6+8+9=23 , т.е. будет равна 17, а эти две цифры будут 5 и 6. Следовательно, расставляя оставшиеся цифры минимальным образом, получим число 1024375869.)

11. Поверхность куба 11×11×11 разбита на клетки 1×1. Муравей бегает по диагоналям клеток, нигде не поворачивая назад. Он не может бывать внутри одной клетки более одного раза, но может несколько раз проходить одну вершину. Какое наибольшее количество центров клеток мог посетить муравей? (**<u>715 клеток</u>. Покрасим вершины клеток в два цвета в шахматном порядке. Тогда каждая диагональ будет соединять две одноцветных вершины, и муравей сможет бегать только через вершины одного цвета (пусть они белые). Все эти вершины, кроме четырёх вершин куба — чётные. Возьмём максимальный маршрут муравья и сотрём все входящие в него ребра. Тогда по крайней мере из двух белых вершин будет выходить нечётное число нестёртых ребер. При этом хотя бы две такие вершины попадут в одну компоненту связности нестёртой части «белого» графа. Соединяющий их в этой компоненте маршрут имеет длину не менее 11, поэтому существует по крайней мере 11 не посещённых муравьем центров клеток, то есть муравей посетил не более $6\cdot 11^2-11 = 715$ центров клеток. При этом маршрут в 715 клеток существует, т.к. можно убрать путь ровно из 11 рёбер между двумя нечётными вершинами. Тогда у нас останется связный граф с двумя нечётными вершинами и 715 рёбрами, в котором существует эйлеров путь, концами которого и будут эти две нечётные вершины.**)

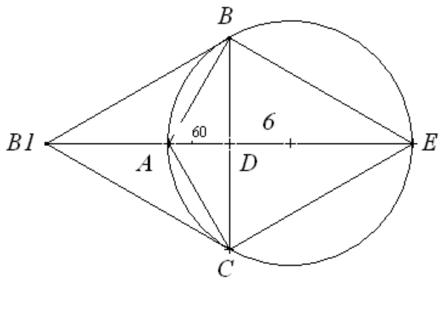
12. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} \ge xy$. (**см. рис. Данное неравенство равносильно совокупности систем:**

$$\begin{cases} |x| \le 1, \\ |y| \le 1, \\ xy \le 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |x| \le 1, \\ |y| \le 1, \\ xy > 0, \\ \left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right) \ge x^2y^2 \end{cases}.$$



Множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих первой системе, представляет собой объединение двух квадратов со стороной 1, расположенных во II и IV координатных четвертях. Учитывая, что последнее неравенство второй системы равносильно неравенству $x^2 + y^2 \le 1$, получим, что множество точек, удовлетворяющих второй системе – объединение двух «четвертинок» единичного круга, расположенных в I и III координатных четвертях.)

13. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60°$, $AE = 6$. Найдите площадь треугольника ABC. (<u>$\frac{9\sqrt{3}}{4}$</u>. **На продолжении отрезка EA за точку A отложим отрезок AB_1, равный AB. Тогда $B_1D=B_1A+AD=BA+AD=DE$. Следовательно, четырёхугольник B_1BEC – параллелограмм, в котором $\angle ABC= \angle B_1EC=\angle BB_1A=30°$, $\angle ADB=90°$, тогда B_1BEC – ромб, а AE – диаметр окружности. Тогда $AC=AB=AE/2=3$. Следовательно, $S_{\Delta ABC}=(AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC)/2=(3\cdot 3\cdot\sin 120°)/2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.**)



14. Прямоугольник 4×100 разбит на доминошки (прямоугольники 1×2). Какое наименьшее количество точек может оказаться вершинами доминошек? (**<u>255 точек</u>. Нужные нам точки являются узлами клетчатой решётки (всего их $5\cdot 101=505$). Найдём наибольшее возможное количество из этих узлов, не являющихся вершинами доминошек (всего у нас $2\cdot 100=200$ доминошек), такие узлы назовём *свободными*. Заметим, что свободный узел является кон-**

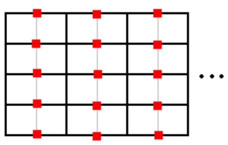


рис. 1

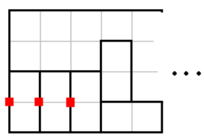


рис. 2

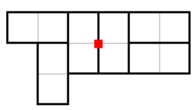
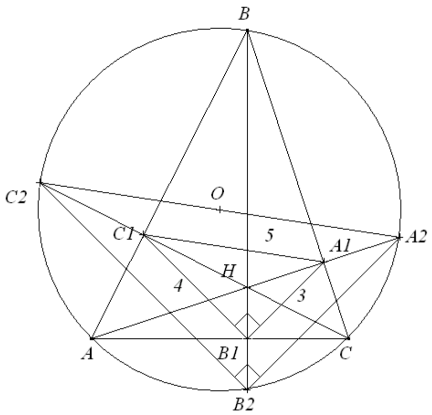


рис. 3

цом перегородки внутри доминошки, причём либо этот узел лежит на краю прямоугольника, либо на стыке двух перегородок. Т.о., свободные узлы входят в цепочки из перегородок, причём в случае, если блок из *n* доминошек (прямоугольник 2×*n*) находится между противоположными краями прямоугольника (блоки 2×4 или 2×100 при *n* соответственно равных 4 и 100), то мы получим соответственно 5 или 101 свободный узел, т.е. *n*+1 (см. рис. 1 при *n*=4). Если же блок будет другого размера, то он даст нам либо *n*, либо *n*–1 свободный узел в случаях выхода блока на одну границу прямоугольника (см. пример на рис. 2 при *n*=3) или когда оба края блока со стороны 2 находятся внутри прямоугольника (см. пример на рис. 3 при *n*=2). Значит, наибольшее количество свободных узлов мы получим при наибольшем возможном числе блоков 2×4, на каждом из которых мы получаем дополнительный свободный узел, а это 50 блоков при горизонтальном разбиении на доминошки вдоль длинной стороны в 100 клеток (см. рис. 1). Тогда наибольшее количество свободных узлов равно сумме количества доминошек (200) и максимального количества блоков 2×4 (50). Всего получаем 250=200+50 свободных узлов и соответственно минимум 255=505–250 узлов, являющихся вершинами доминошек. Пример такого количества нужных нам точек приведён выше (рис.1).)

15. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 3, 4 и 5. Найдите радиус описанной около треугольника окружности. **(<u>5</u>. Пусть продолжения высот AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно, а H — точка пересечения высот. Тогда известно, что A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков HA_2, HB_2 и HC_2, поэтому A_1B_1, A_1C_1 и B_1C_1 — средние линии треугольников A_2HB_2, A_2HC_2 и B_2HC_2. Значит, треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом 2, а т.к. треугольник $A_1B_1C_1$ — прямоугольный ($3^2+4^2=5^2$), то треугольник $A_2B_2C_2$ — также прямоугольный, причём его угол, лежащий против наибольшей стороны, равен 90º. Следовательно, диаметр описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$, а значит, и треугольника ABC, равен гипотенузе треугольника $A_2B_2C_2$, т.е. 10, а искомый радиус равен 5.)**



16. На доске написано натуральное число. Первую цифру сложили со второй, вторую с третьей, и так далее, предпоследнюю цифру сложили с последней, после чего эти числа выписали в строчку без пробелов, сохраняя порядок. С полученным числом проделали такую же операцию, и так далее (например, из 1568 получается 61114, а из него, в свою очередь, 7225). Найдите наименьшее число, из которого такими операциями нельзя получить однозначное число. **(<u>991</u>, из которого будем получать 1810→991→… . Из двузначного числа мы получим либо сразу однозначное, либо двузначное, не больше 18, из которого вторым ходом получим однозначное. Докажем, что из трёхзначного числа, не превосходящего 990, мы обязательно получим однозначное, значит, нужное нам число будет не меньше 991. Из трёхзначного числа $\overline{abc}$ мы получим $\overline{(a+b)(b+c)}$, которое будет либо 1) двузначным (этот случай описан выше), либо 2) трёхзначным вида $\overline{1(a+b-10)(b+c)}$, либо 3) трёхзначным вида $\overline{(a+b)1(b+c-10)}$, либо 4) четырёхзначным вида $\overline{1(a+b-10)1(b+c-10)}$, а затем сразу трёхзначным вида $\overline{(a+b-9)(a+b-9)(b+c-9)}$ (во всех трёх случаях в скобках стоят цифры). В последних трёх случаях мы получим не более чем за 2 шага трёхзначное число либо с меньшей суммой цифрой, значит, в некоторый момент придём к случаю 1, либо сохраним сумму цифр при *b*=9. Тогда во втором случае *c*=0, в третьем – *a*=0 (невозможно), в четвёртом – *a*=9 (что даёт число не меньше 990, а 990→189→917→108→18→9 – не подходит, т.е. число должно быть не меньше 991). Второй же случай даёт $\overline{1(a+b-10)(b+c)} = \overline{1(a-1)9} \to \overline{a(a+8)}$ – либо двузначное число, либо трёхзначное число $\overline{a1(a-2)}$ с суммой цифр, меньшей, чем у $\overline{a90}$ (а случай уменьшения суммы цифр нами уже разобран). Значит, нужное нам число будет не меньше 991.)**