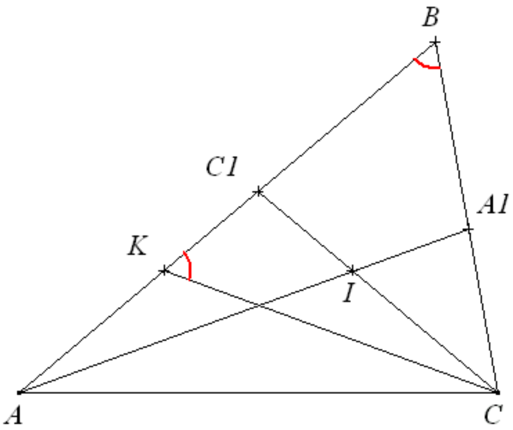
XIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». X Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти».

<u>Младшая лига.</u> **<u>Решения</u>**. ***11 сентября 2017 года***



1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, I — точка их пересечения. Известно, что $AI = BC$ и $\angle ACB = 2\angle BAC$. Найдите углы треугольника. **(<u>40°, 60°, 80°</u>. Пусть $\angle A=2\alpha$, тогда $\angle C=4\alpha$. ΔACC_1 – равнобедренный с основанием AC, значит, биссектриса CK угла ACC_1 равна биссектрисе AI, которая равна BC. Значит, ΔBKC – равнобедренный и $\angle KBC=\angle BKC=\angle KAC+\angle KCA=2\alpha+\alpha=3\alpha$. Тогда сумма углов ΔABC равна $2\alpha+3\alpha+4\alpha=9\alpha$, следовательно, $\alpha=180°:9=20°$.)**

2. В однокруговом шахматном турнире участвовали 30 шахматистов (победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0). Разряд присвоили тем, кто набрал не менее 60% возможных очков. Какому наибольшему количеству участников могли присвоить разряд? **(<u>24 участника</u>, которые могли сыграть между собой вничью и выиграть у остальных 6 участников, набрав по 23·0,5+6=17,5 очков, это больше чем 0,6·29=17,4, что составляет 60% от возможного максимума в 29 очков. *<u>Доказательство оценки</u>:* Если бы таких участников было не менее 25, то они бы набрали в сумме не менее 17,5·25=437,5 очков, что уже больше $C_{30}^2=\dfrac{30\cdot 29}{2}=15\cdot 29=435$ разыгрываемых в турнире очков.)**

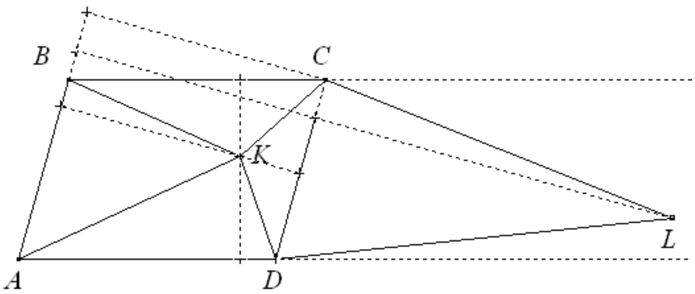
3. На шахматной доске 8×8 отмечено 19 клеток. Пара соседних по стороне клеток называется *хорошей*, если хотя бы одна клетка из пары отмечена. Каково наибольшее возможное количество хороших пар? **(<u>75 *хороших* пар</u>, пример см. на рис., когда 18 отмеченных клеток входят в 4 пары, а 1 клетка на краю входит в 3 пары. Каждая отмеченная клетка входит максимум в 4 *хороших* пары с соседними клетками в 4 разных направлениях. Значит, всего максимум 4·19=76 пар. Но если каждая отмеченная клетка даёт 4 пары, то каждая отмеченная клетка должна находиться в пределах центрального квадрата 6×6. Разобьём этот квадрат 6×6 на 9 квадратов 2×2. Тогда по принципу Дирихле найдутся три отмеченные клетки в пределах какого-то квадрата 2×2, они образуют трёхклеточный уголок и соответственно дают две хороших пары с двумя отмеченными клетками, при этом каждую пару мы считаем дважды – для каждой отмеченной клетки по разу. Тогда будет не более 76–2=74 хороших пар (противоречие с тем, что их 76). Значит, ровно 76 хороших пар быть не могло, следовательно, их – не более 75.)**

	X		X		X		
X		X		X		X	
	X		X		X		
		X		X		X	
	X		X		X		
		X		X		X	

4. На собеседовании десяти кандидатам был предложен тест, состоящий из нескольких вопросов. Известно, что любые пять человек ответили вместе на все вопросы (т.е. на каждый вопрос хоть один из пяти дал правильный ответ), а любые четыре – нет. При каком минимальном количестве вопросов это могло быть? *Ответ дать числом в десятичной записи*. **(<u>$C_{10}^4=\dfrac{10!}{4!\cdot 6!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2}=210$</u>. Заметим, что для каждого вопроса количество людей, не ответивших на него, не больше четырёх, иначе на какой-то вопрос не ответили некоторые пять человек, что противоречит условию. С другой стороны, для каждой четвёрки людей найдется вопрос, на который они не ответили (иначе они бы вместе ответили на все вопросы вопреки условию); таким образом, на этот вопрос не ответили в точности эти четверо людей. Итак, каждой четвёрке людей можно поставить в соответствие вопрос, на который они (и только они) не ответили. Поэтому число вопросов не меньше числа четвёрок людей, которые можно выбрать из 10 человек (т.е. числа сочетаний из 10 по 4). Наоборот, если в тесте было вопросов столько,**

сколько имеется четвёрок людей, причём на каждый вопрос не ответило 4 человека и все эти четверки различны, то условие задачи выполняется.)

5. Точка K лежит внутри параллелограмма $ABCD$, а точка L — в области, ограниченной стороной CD и продолжениями сторон BC и AD. Известно, что $S_{ABK} = 9$, $S_{BCK} = 4$, $S_{DAK} = 8$, $S_{DCL} = 18$. Найдите S_{ABL}. **(<u>30</u>. Пусть $\rho(X,YZ)$ – расстояние от точки X до прямой YZ, тогда площадь параллелограмма $ABCD$ равна с одной стороны $AB\cdot\rho(C,AB) = AB\cdot(\rho(K,AB)+\rho(K,CD)) = AB\cdot\rho(K,AB)+CD\cdot\rho(K,CD) = 2S_{ABK}+2S_{CDK} = 18+2S_{CDK}$, а с другой стороны – $BC\cdot\rho(A,BC) = BC\cdot(\rho(K,BC)+\rho(K,AD)) = BC\cdot\rho(K,BC)+AD\cdot\rho(K,AD) = 2S_{BCK}+2S_{DAK} = 8+16=24$, значит, $S_{CDK}=(24–18)/2=3$. Тогда $S_{ABL}= AB\cdot\rho(L,AB)/2= AB\cdot\rho(C,AB)/2+ AB\cdot\rho(L,CD)/2= S_{ABCD}/2+ CD\cdot\rho(L,CD)/2= S_{ABCD}/2+S_{DCL}=12+18=30$.)**



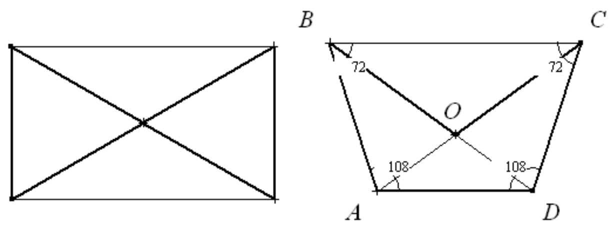
6. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $(a – b)^3 + (b – c)^3 + (c – a)^3$, где сумма целых чисел a, b и c не делится на 3. **(<u>18</u>. Во-первых, это число всегда будет чётным, что проверятся перебором чётностей наших чисел. Во-вторых, данное число всегда делится на 9. Сумма целых чисел a, b и c не делится на 3 только в случае, когда два числа (например, в силу цикличности a и b) будут иметь равный остаток при делении на 3, а третье число (c) имеет другой остаток. Значит, $(a–b)^3$ делится на 27 и 9. Рассмотрев возможные случаи остатков разностей $(b–c)$ и $(a–c)$ по модулю 9 (это комбинации 1, 4 , 7 или 2, 5, 8), нетрудно убедиться, что сумма $(b–c)^3+(c–a)^3$ делится на 9. При том для набора (3, 0, 1) мы получим $(a–b)^3+(b–c)^3+(c–a)^3 = 3^3+(–1)^3+(–2)^3=18$, значит, НОД=18.)**

7. В кружок танцев ходят три мальчика и одиннадцать девочек. Сколькими способами их можно разбить на пары так, чтобы каждый мальчик оказался в паре с девочкой? *Ответ дать числом в десятичной записи.* **(<u>11·10·9·7!!=11·10·9·7·5·3·1=103950</u>, т.к. 11·10·9=990 способов выбрать 3 девочки для пар трём мальчикам, а остальных 8 девочек можно разбить на пары 7!! способами - первой по алфавиту девочке выбрать партнёршу 7 способами, следующей по алфавиту девочке – партнёршу 5 способами и т.д.)**

8. На шахматную доску, первоначально пустую, по очереди ставятся слоны по следующему правилу: если только что поставленный слон кого-то побил, то один из побитых им слонов снимается с доски. Какое наибольшее количество слонов можно поставить на доску с соблюдением данного правила? **(<u>50 слонов</u>. Фактически расстановка слонов происходит на двух досках – из чёрного цвета и из белого цвета. Проведём рассуждения для одного из цветов, для второго – всё аналогично. За один ход либо число слонов увеличивается на 1 за счёт нового слона, никого не бьющего, либо число фигур остаётся прежним. Т.к. наименьшее количество побитых слоном клеток равно 7, то увеличение числа фигур на одном цвете не может происходить после того, как свободных клеток этого цвета стало ровно 7, значит, всего слонов на этом цвете будет не более 32-7=25, а всего не более 25·2=50. Рассмотрим граф ходов слона на одном цвете, он связный. Тогда будем ставить каждого нового слона, начиная каждый раз с клетки a1 или a8 в зависимости от цвета, фактически передвигая этого слона по некоторому свободному пути, например, по главной диагонали с последующим уходом на боковые ответвления от неё до нужной нам клетки.)**

с	с	с	с	с	с	с	
с		с	с	с	с		с
с	с		с	с		с	с
с	с	с			с	с	с
с	с	с			с	с	с
с	с		с	с		с	с
с		с	с	с	с		с
с	с	с	с	с	с	с	

9. В четырехугольнике отметили восемь отрезков: четыре стороны и четыре отрезка, на которые диагонали разбили друг друга точкой пересечения. Известно, что хотя бы пять из этих отрезков равны. Какими могут быть углы этого четырехугольника? **(<u>1) прямоугольник – углы по 90°; 2) трапеция – углы 108°, 108°, 72° и 72°</u> (см. рис.). Разберём случаи пяти равных отрезков. 1). Четыре стороны – ромб, но**



отрезки диагоналей нет могут быть равны сторонам. 2) Четыре отрезка диагоналей – это прямоугольник, у которого ещё две противоположные стороны равны отрезкам диагоналей. 3) Три отрезка диагоналей и две стороны, тогда ситуация сводится к прямоугольнику из второго случая. 4) Два отрезка диагоналей. Они не могут образовывать одну диагональ, т.к. тогда ещё де равные им стороны должны будут дать треугольник, у которого сумма двух сторон равна третьей – противоречие с неравенством треугольника. Значит, эти два отрезка будут соседними, а остальные три стороны образуют ломаную *ABOCD* (см. рис.) из равных звеньев. Воспользуемся равнобедренными треугольниками *ABD, ABO, CDO, CAD*. Пусть $\angle ABO=\angle ADB=\alpha$, тогда $\angle BAO=\angle AOB=\angle COD=\angle CDO=90°-\alpha/2$. $\angle OCD=\alpha=\angle CAD$. Тогда внешний $\angle AOB=90°-\alpha/2=\angle OAD+\angle ODA=2\alpha$, отсюда $\alpha=36°$. Остальные нужные нам углы легко после этого подсчитать.)

10. На клетчатой доске 10×10 отмечено 33 клетки. Пара соседних по стороне клеток называется *хорошей*, если хотя бы одна клетка из пары отмечена. Какое наибольшее количество хороших пар может быть? **(<u>131 *хорошая* пара</u>, пример см. на рис., когда 32 отмеченные клетки входят в 4 пары, а 1 клетка на краю входит в 3 пары. Каждая отмеченная клетка входит максимум в 4 *хороших* пары с соседними клетками в 4 разных направлениях. Значит, всего максимум 4·33=132 пар. Но если каждая отмеченная клетка даёт 4 пары, то каждая отмеченная клетка должна находиться в пределах центрального квадрата 8×8. Разобьём этот квадрат 8×8 на 16 квадратов 2×2. Тогда по принципу Дирихле найдутся три отмеченные клетки в пределах какого-то квадрата 2×2, они образуют трёхклеточный уголок и соответственно дают две хороших пары с двумя отмеченными клетками, при этом каждую пару мы считаем дважды – для каждой отмеченной клетки по разу. Тогда будет не более 132–2=130 хороших пар (противоречие с тем, что их 132). Значит, ровно 132 хороших пар быть не могло, следовательно, их – не более 131.)**

	x		x		x		x		
x		x		x		x		x	
	x		x		x		x		
		x		x		x		x	
	x		x		x		x		
		x		x		x		x	
	x		x		x		x		
		x		x		x		x	

11. Сколько существует натуральных чисел вида $\overline{abcdabcd}$, которые кратны 18769? **(<u>65 чисел</u>. $\overline{abcdabcd}=10001\cdot\overline{abcd}=73\cdot137\cdot\overline{abcd}$, 18769=137², значит, нам нужны такие числа, что $73\cdot\overline{abcd}\,\vdots\,137$. Тогда в силу взаимной простоты чисел 73 и 137 $\overline{abcd}\,\vdots\,137$. Самое маленькое такое четырёхзначное число 137·8=1096, а самое большое 72·137=9864, значит, всего 72–(8–1)=65 таких чисел.)**

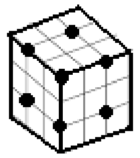
12. Решите в целых числах уравнение $\frac{b^2+c^2-bc}{a}=\frac{2b+2c-a}{4}$. **(<u>$a=2n$, $b=n$, $c=n$, где n – любое целое ненулевое число</u>. Начнём преобразовывать с учётом $a\neq0$.** $\frac{b^2+c^2-bc}{a}=\frac{2b+2c-a}{4}\Leftrightarrow$

$4b^2+4c^2-4bc=2ab+2ac-a^2 \Leftrightarrow a^2+4b^2+4c^2-4bc-2ab-2ac=0 \Leftrightarrow$

$2a^2+8b^2+8c^2-8bc-4ab-4ac=0 \Leftrightarrow (a^2-4ab+4b^2)+(a^2-4ac+4c^2)+(4b^2-8bc+4c^2)=0 \Leftrightarrow$

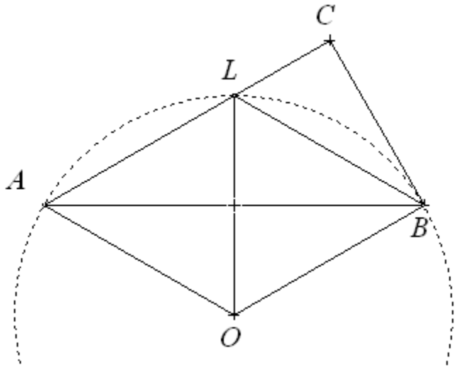
$(a-2b)^2+(a-2c)^2+4(b-c)^2=0$, **откуда следует, что каждая скобка равна 0, т.е.** $a=2b=2c,\ b=c$ **.)**

13. На поверхности кубика Рубика 3×3×3 отмечены несколько точек так, что в каждом из 54 квадратиков, включая его границу, отмечена ровно одна точка. Какое наименьшее число точек может быть отмечено? **(<u>14 точек, см. пример, на котором указаны 7 точек на трёх попарно соседних гранях, ещё 7 точек будут расположены симметрично относительно центра куба</u>. Если бы точек было не больше 13, то квадратов было бы не больше 13·4=52 – противоречие с 54, т.к. каждая точка задевает не более 4 квадратов.)**



14. *BL* – биссектриса треугольника *ABC*, центр *O* описанной окружности треугольника *ABL* оказался симметричен точке *L* относительно стороны *AB*. Какие значения может принимать $\angle ACB$? **(<u>90°</u>. Отрезки *BO* и *BL* равны как симметричные относительно *AB*. Отрезки *BO* и *LO* равны как радиусы окружности, значит, ΔLBO – равносторонний. Аналогично ΔLAO – рав-**

носторонний. Тогда $\angle ABL=\angle BAL=30°$, $\angle ABC=2\angle ABL=60°$, $\angle ACB=180°-\angle BAC-\angle ABC=180°-30°-60°=90°$.)



15. В однокруговом шахматном турнире участвовало 30 шахматистов. У какого наибольшего числа шахматистов по окончании турнира могло оказаться ровно 5 очков? (победа – 1 очко, ничья – 1/2 очка, поражение – 0 очков) **(<u>11</u>, например, когда 11 шахматистов сыграют между собой вничью и проиграют всем остальным шахматистам. Предположим, что могло быть хотя бы 12 шахматистов с 5 очками. Между собой такие 12 человек сыграли 12·11/2=66 партий и разыграли 66 очков, т.е. в сумме уже набрали не менее 66 очков, что больше 12·5=60 очков, которые они имеют. Противоречие.)**

16. Числа от 1 до 63 разбиты на 10 групп, в каждой группе подсчитано произведение входящих в неё чисел. Какое наибольшее значение может иметь наибольший общий делитель получившихся произведений? *Ответ дать числом в десятичной записи.* **($2^5\cdot 3^3\cdot 5=$<u>4320</u>. Произведение этих 63 чисел 63! в своём разложении на простые множители содержит $\left[\frac{63}{2}\right]+\left[\frac{63}{2^2}\right]+\left[\frac{63}{2^3}\right]+\left[\frac{63}{2^4}\right]+\ldots=31+15+7+3+1=57$ двоек, $\left[\frac{63}{3}\right]+\left[\frac{63}{3^2}\right]+\left[\frac{63}{3^3}\right]+\left[\frac{63}{3^4}\right]+\ldots=21+7+2=30$ троек, $\left[\frac{63}{5}\right]+\left[\frac{63}{5^2}\right]+\left[\frac{63}{5^3}\right]+\ldots=12+2=14$ пятёрок, $\left[\frac{63}{7}\right]+\left[\frac{63}{7^2}\right]+\ldots=9+1=10$ семёрок, остальные простые множители будут в степенях, меньших 10. Значит, НОД десяти возможных произведений может содержать двойку в максимум $\left[\frac{57}{10}\right]=5$ степени, тройку в максимум $\left[\frac{30}{10}\right]=3$ степени, пятёрку в максимум $\left[\frac{14}{10}\right]=1$ степени, семёрку в максимум $\left[\frac{10}{10}\right]=1$ степени, остальные же простые числа не могут входить в НОД, т.к. встречаются меньше 10 раз. Но при этом семёрка встречается только в 9 числах (в числе 49 она встречается 2 раза), значит, она также не может входить в НОД. Значит, НОД$\le 2^5\cdot 3^3\cdot 5=4320$. Приведём пример, когда НОД=4320, при этом числа будем записывать разложенными на простые множители, чтобы было видно 5 двоек, 3 тройки и 1 пятёрка в разложении на простые множители произведения всех чисел каждой группы, при этом начнём с пятёрок, продолжим с тройками, затем закончим двойками. Числа, неуказанные в таблице, разбросаем по группам произвольным образом, т.к. они уже не влияют на НОД.)**

5	**$2\cdot 5$**	**$3\cdot 5$**	**$2^2\cdot 5$**	**5^2**	**$2\cdot 3\cdot 5$**	**$2^3\cdot 5$**	**$3^2\cdot 5$**	**$2\cdot 5^2$**	**$2^2\cdot 3\cdot 5$**
3	**3^2**	**$2\cdot 3^2$**	**$2^3\cdot 3$**	**3^3**	**$2^2\cdot 3^2$**	**$2\cdot 7\cdot 3$**	**$2^4\cdot 3$**	**$2\cdot 3^3$**	**$7\cdot 3^2$**
$2\cdot 3$	**$7\cdot 3$**		**$11\cdot 3$**			**$17\cdot 3$**			
$2^2\cdot 3$			**$13\cdot 3$**			**$19\cdot 3$**			
2	**2^3**	**2^4**		**2^5**	**2^2**	**$13\cdot 2$**	**$17\cdot 2$**	**$7\cdot 2^2$**	**$11\cdot 2^2$**
$7\cdot 2$	**$11\cdot 2$**							**$19\cdot 2$**	**$23\cdot 2$**