Старшая лига. 1 вариант.

1. Треугольник ABC вписан в параболу $y=x^2$ так, что его медиана $BM=2$ и параллельна оси ординат. Найдите площадь треугольника ABC.

2. Пусть $f(x)=x^2+ax+b\cos x$. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $f(x)=0$ и $f(f(x))=0$ имеют совпадающие непустые множества действительных корней.

3. На доску в порядке возрастания выписывают все числа, являющиеся степенями тройки, а также суммами различных степеней тройки: 1; 3; 4; 9; 10; 12; 13; 27; 28; 30; 31, … . Какое число (в десятичной записи) стоит на 100-м месте?

4. Сколькими способами коридор 3×16 метров можно покрыть в один слой без пропусков одинаковыми кусками линолеума 1×3 метра?

5. Точка K лежит внутри параллелограмма $ABCD$, а точка L — в области, ограниченной стороной CD и продолжениями сторон BC и AD. Известно, что $S_{ABK} = 9$, $S_{BCK} = 4$, $S_{DAK} = 8$, $S_{DCL} = 18$. Найдите S_{ABL}.

6. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$, где сумма целых чисел a, b и c не делится на 3.

7. В кружок танцев ходят три мальчика и одиннадцать девочек. Сколькими способами их можно разбить на пары так, чтобы каждый мальчик оказался в паре с девочкой? *Ответ дать числом в десятичной записи.*

8. На шахматную доску, первоначально пустую, по очереди ставятся слоны по следующему правилу: если только что поставленный слон кого-то побил, то один из побитых им слонов снимается с доски. Какое наибольшее количество слонов можно поставить на доску с соблюдением данного правила?

Старшая лига. 2 вариант.

9. На малой дуге AB описанной около квадрата $ABCD$ окружности взята точка K. Найдите CK, если $AK=a$, $BK=b$.

10. Рассматриваются все представления числа 100 в виде суммы 10 целых неотрицательных чисел $x_1+x_2+\ldots+x_{10}$ (порядок слагаемых важен). Чему равна сумма всех чисел вида $\dfrac{1}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_{10}!}$, получаемых из соответствующих разложений числа 100?

11. Сколько существует натуральных чисел вида $\overline{abcdabcd}$, которые кратны 18769?

12. Решите в целых числах уравнение $\dfrac{b^2+c^2-bc}{a}=\dfrac{2b+2c-a}{4}$.

13. Сколькими способами во всех клетках таблицы 4×4 можно расставить единицы и двойки так, чтобы суммы чисел во всех строках и столбцах были простыми числами?

14. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с $\angle B=\angle C=120°$ и со сторонами $AB=3$, $BC=x$, $CD=4$ и $AD=\sqrt{x^2+25}$. Найдите x.

15. В однокруговом шахматном турнире участвовало 30 шахматистов. У какого наибольшего числа шахматистов по окончании турнира могло оказаться ровно 5 очков? (победа – 1 очко, ничья – 1/2 очка, поражение – 0 очков)

16. Числа от 1 до 63 разбиты на 10 групп, в каждой группе подсчитано произведение входящих в неё чисел. Какое наибольшее значение может иметь наибольший общий делитель получившихся произведений? *Ответ дать числом в десятичной записи.*