XIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». X Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти».

Старшая лига. **Решения**. ***11 сентября 2017 года***

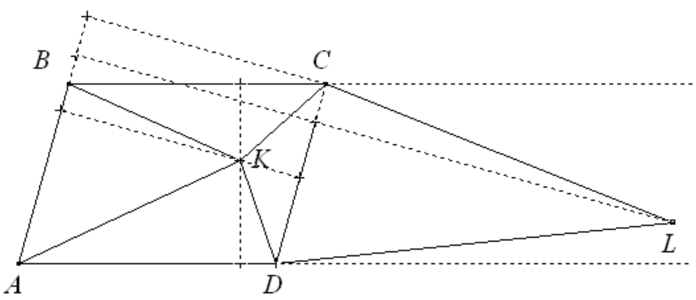
1. Треугольник *ABC* вписан в параболу $y=x^2$ так, что его медиана $BM=2$ и параллельна оси ординат. Найдите площадь треугольника *ABC*. **($\underline{2\sqrt{2}}$. Пусть у вершин будут следующие координаты: $A(a;a^2)$, $B(b;b^2)$ и $C(c;c^2)$, тогда середина стороны *AC* точка *M* имеет координаты $\left(\frac{a+c}{2};\frac{a^2+c^2}{2}\right)$ или в силу условий ($BM=2$ и *BM* параллельна оси ординат) имеет координаты $(b;b^2+2)$. Получаем систему из двух уравнений с тремя неизвестными, из которой получим уравнение $\frac{a^2+c^2}{2}=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+2$, откуда $|a-c|=2\sqrt{2}$. Медиана *BM* делит треугольник *ABC* на два равновеликих треугольника с основанием *BM* и высотой, равной половине $|a-c|$. Их площади равны $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$.)**

2. Пусть $f(x)=x^2+ax+b\cos x$. Найдите все значения параметров *a* и *b*, при которых уравнения $f(x)=0$ и $f(f(x))=0$ имеют совпадающие непустые множества действительных корней. **($\underline{0\le a<4,\ b=0}$. Пусть x_0 – общий корень, тогда $f(x_0)=0$ и $f(f(x_0))=0$. Подставив первое равенство во второе, получаем $f(0)=0$, т.е. $b=0$. Итак, $f(x)=x^2+ax$, и уравнение $f(x)=0$ имеет корни 0 и $-a$. Далее, $f(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ f(x)=-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=0, \\ x=-a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$ Условие задачи выполнено, если каждый корень уравнения $f(x)=-a$ равен 0 или $-a$. Поэтому случаи $a\in(0,4)$, $a=0$ подходят, т.к. уравнение $f(x)=-a$ либо не имеет корней ($D=a^2-4a=a(a-4)<0$, либо имеет корень 0. При остальных значениях *a* уравнение $f(x)=-a$ имеет хотя бы один корень, не совпадающий с 0 и $-a$.)**

3. На доску в порядке возрастания выписывают все числа, являющиеся степенями тройки, а также суммами различных степеней тройки: 1; 3; 4; 9; 10; 12; 13; 27; 28; 30; 31, … . Какое число (в десятичной записи) стоит на 100-м месте? **($3^6+3^5+3^2=\underline{981}$. Запишем числа нашей последовательности в троичной системе счисления: 1, 10, 11, 100, 101, … В результате получим весь натуральный ряд в двоичной системе счисления. Значит, надо найти двоичную запись числа $100=64+32+4=2^6+2^5+2^2=1100100_2$, которая и даст нужный нам ответ уже в троичной системе счисления.)**

4. Сколькими способами коридор 3×16 метров можно покрыть в один слой без пропусков одинаковыми кусками линолеума 1×3 метра? **(<u>277 способов</u>. Обозначим через $П(n)$ число способов, которым можно покрыть коридор $3\times n$ метров. Очевидно, что $П(1)=П(2)=1$, а $П(3) = 2$. Заметим теперь, что к короткой стене покрытого линолеумом коридора примыкает либо один кусок линолеума своей длинной стороной, либо три куска своими короткими сторонам. В первом случае остается покрыть коридор $3\times(n-1)$, в втором – коридор $3\times(n-3)$. Получается, что $П(n) = П(n-1)+П(n-3)$. Теперь последовательно находим, что $П(4)=3$, $П(5)=4$, $П(6)=6$, $П(7)=9$, $П(8)=13$, $П(9)=19$, $П(10)=28$, $П(11)=41$, $П(12)=60$, $П(13)=88$, $П(14)=129$, $П(15) = 189$, $П(16)=277$.)**

5. Точка *K* лежит внутри параллелограмма *ABCD*, а точка *L* — в области, ограниченной стороной *CD* и продолжениями сторон *BC* и *AD*. Известно, что $S_{ABK} = 9$, $S_{BCK} = 4$, $S_{DAK} = 8$, $S_{DCL} = 18$. Найдите S_{ABL}. **(<u>30</u>. Пусть $\rho(X,YZ)$ – расстояние от точки *X* до прямой *YZ*, тогда площадь параллелограмма *ABCD* равна с одной стороны $AB\cdot\rho(C,AB) = AB\cdot(\rho(K,AB)+\rho(K,CD)) = AB\cdot\rho(K,AB)+CD\cdot\rho(K,CD) =2S_{ABK}+2S_{CDK} = 18+2S_{CDK}$, а с другой стороны – $BC\cdot\rho(A,BC) = BC\cdot(\rho(K,BC)+\rho(K,AD))= BC\cdot\rho(K,BC)+AD\cdot\rho(K,AD) = 2S_{BCK}+2S_{DAK} = 8+16=24$, значит, $S_{CDK}=(24–18)/2=3$. Тогда $S_{ABL}= AB\cdot\rho(L,AB)/2= AB\cdot\rho(C,AB)/2+ AB\cdot\rho(L,CD)/2= S_{ABCD}/2+ CD\cdot\rho(L,CD)/2= S_{ABCD}/2+S_{DCL}=12+18=30$.)**



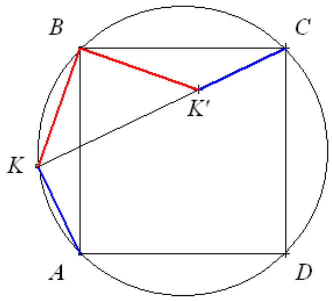
6. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$, где сумма целых чисел a, b и c не делится на 3. **(<u>18</u>. Во-первых, это число всегда будет чётным, что проверятся перебором чётностей наших чисел. Во-вторых, данное число всегда делится на 9. Сумма целых чисел *a, b* и *c* не делится на 3 только в случае, когда два числа (например, в силу цикличности *a* и *b*) будут иметь равный остаток при делении на 3, а третье число (*c*) имеет другой остаток. Значит, $(a-b)^3$ делится на 27 и 9. Рассмотрев возможные случаи остатков разностей $(b-c)$ и $(a-c)$ по модулю 9 (это комбинации 1, 4 , 7 или 2, 5, 8), нетрудно убедиться, что сумма $(b-c)^3+(c-a)^3$ делится на 9. При том для набора (3, 0, 1) мы получим $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3^3+(-1)^3+(-2)^3=18$, значит, НОД=18.)**

7. В кружок танцев ходят три мальчика и одиннадцать девочек. Сколькими способами их можно разбить на пары так, чтобы каждый мальчик оказался в паре с девочкой? *Ответ дать числом в десятичной записи.* **(<u>11·10·9·7!!=11·10·9·7·5·3·1=103950</u>, т.к. 11·10·9=990 способов выбрать 3 девочки для пар трём мальчикам, а остальных 8 девочек можно разбить на пары 7!! способами - первой по алфавиту девочке выбрать партнёршу 7 способами, следующей по алфавиту девочке – партнёршу 5 способами и т.д.)**

8. На шахматную доску, первоначально пустую, по очереди ставятся слоны по следующему правилу: если только что поставленный слон кого-то побил, то один из побитых им слонов снимается с доски. Какое наибольшее количество слонов можно поставить на доску с соблюдением данного правила? **(<u>50 слонов</u>. Фактически расстановка слонов происходит на двух досках – из чёрного цвета и из белого цвета. Проведём рассуждения для одного из цветов, для второго – всё аналогично. За один ход либо число слонов увеличивается на 1 за счёт нового слона, никого не бьющего, либо число фигур остаётся прежним. Т.к. наименьшее количество побитых слоном клеток равно 7, то увеличение числа фигур на одном цвете не может происходить после того, как свободных клеток этого цвета стало ровно 7, значит, всего слонов на этом цвете будет не более 32-7=25, а всего не более 25·2=50. Рассмотрим граф ходов слона на одном цвете, он связный. Тогда будем ставить каждого нового слона, начиная каждый раз с клетки a1 или a8 в зависимости от цвета, фактически передвигая этого слона по некоторому свободному пути, например, по главной диагонали с последующим уходом на боковые ответвления от неё до нужной нам клетки.)**

с	с	с	с	с	с	с	
с		с	с	с	с		с
с	с		с	с		с	с
с	с	с			с	с	с
с	с	с			с	с	с
с	с		с	с		с	с
с		с	с	с	с		с
с	с	с	с	с	с	с	

9. На малой дуге *AB* описанной около квадрата *ABCD* окружности взята точка *K*. Найдите *CK*, если *AK=a, BK=b*. **(<u>$a+b\sqrt{2}$</u>. Рассмотрим поворот на угол 90° относительно точки *B*, переводящий точку *A* в точку *C*. Пусть *K'* – образ точки *K* при этом повороте, тогда точка *K'* лежит на отрезке *KC*, т.к. ∠*AKC*=90° (опирается на диаметр *AC*) и при повороте луч *AK* перейдёт в перпендикулярный луч *CK*. Получим прямоугольный равнобедренный треугольник *BKK'*, тогда *CK=CK'+K'K=AK+K'K=* $a+b\sqrt{2}$.)**



10. Рассматриваются все представления числа 100 в виде суммы 10 целых неотрицательных чисел $x_1+x_2+\ldots+x_{10}$ (порядок слагаемых важен). Чему равна сумма всех чисел вида $\frac{1}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_{10}!}$, получаемых из соответствующих разложений числа 100? **($\frac{10^{100}}{100!}$. Если каждое слагаемое домножить на 100!, то получится сумма чисел вида $P(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, т.е. количеств перестановок с повторениями, когда первый элемент (например, цифра 1) встречается x_1 раз, второй (цифра 2) – x_2 раза, десятый (цифра 0) – x_{10} раз. В сумме же это будет количество всех 100-значных десятичных кодов, т.е. количество размещений с повторениями из 10 по 100, равное $\overline{A}_{10}^{100}=10^{100}$. Нужный же нам результат будет в 100! раз меньше.)**

11. Сколько существует натуральных чисел вида $\overline{abcdabcd}$, которые кратны 18769? **(<u>65 чисел</u>. $\overline{abcdabcd}=10001\cdot\overline{abcd}=73\cdot137\cdot\overline{abcd}$, 18769=137², значит, нам нужны такие числа, что $73\cdot\overline{abcd}\,\vdots\,137$. Тогда в силу взаимной простоты чисел 73 и 137 $\overline{abcd}\,\vdots\,137$. Самое**

маленькое такое четырёхзначное число 137·8=1096, а самое большое 72·137=9864, значит, всего 72–(8–1)=65 таких чисел.)

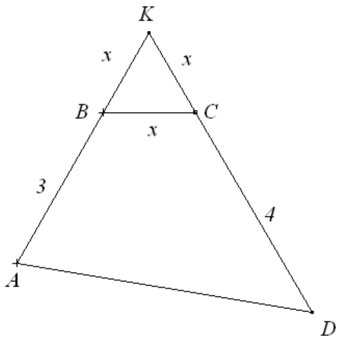
12. Решите в целых числах уравнение $\frac{b^2+c^2-bc}{a}=\frac{2b+2c-a}{4}$. **(<u>$a$=2$n$, b=n, c=n, где n – любое целое ненулевое число</u>. Начнём преобразовывать с учётом a≠0.** $\frac{b^2+c^2-bc}{a}=\frac{2b+2c-a}{4}$ $\Leftrightarrow$

$4b^2+4c^2-4bc=2ab+2ac-a^2$ $\Leftrightarrow$ $a^2+4b^2+4c^2-4bc-2ab-2ac=0$ $\Leftrightarrow$ $2a^2+8b^2+8c^2-8bc-4ab-4ac=0$ $\Leftrightarrow$ $(a^2-4ab+4b^2)+(a^2-4ac+4c^2)+(4b^2-8bc+4c^2)=0$ $\Leftrightarrow$ $(a-2b)^2+(a-2c)^2+4(b-c)^2=0$, **откуда следует, что каждая скобка равна 0, т.е.** $a=2b=2c,\ b=c$.**)**

13. Сколькими способами во всех клетках таблицы 4×4 можно расставить единицы и двойки так, чтобы суммы чисел во всех строках и столбцах были простыми числами? **(<u>512 способов</u>. *<u>Решение 1</u>:* Сумма четырёх единиц-двоек будет в пределах от 4 до 8, значит, может равняться только простым числам 5 и 7, причём сумма 5=1+1+1+2, сумма 7=1+2+2+2. Рассмотрим теперь все возможные случаи сумм по столбцам-строкам. <u>1 случай</u>. Все суммы по столбцам равны 5, тогда и по строкам тоже 5. Тогда в каждом ряду ровно по одной 2. В первом столбце 2 можно поставить 4-ю способами, во втором – 3-я, в третьем – 2-я, в четвёртом – 1-м. Значит, всего 4·3·2·1=4!=24 способа. <u>2 случай</u>, когда все суммы по столбцам равны 7, аналогичен 1-му случаю, если рассуждать про расстановки 1. Ещё 4!=24 способа. <u>3 случай</u>. Одна сумма в столбце равна 5, три другие – 7, аналогично по строкам. Значит, в одном столбце стоит 1 двойка, еще в трех столбцах по 3 двойки, аналогично со строками. Столбец с одной двойкой выбирается 4-мя способами, где эта двойка встаёт также 4-мя способами. Теперь единственная двойка в строке будет либо этой двойкой, либо будет стоять в одной из 9 клеток, не стоящих в занятых первой двойкой столбце и строке. После этого все остальные клетки однозначно заполняются сначала единицами в выбранных столбце и строке, затем двойками и ещё, возможно, одной единицей. Всего получаем 4·4·(1+9)=160 способов. <u>4 случай</u>. Одна сумма в столбце равна 7, три другие – 5, аналогичен 3-му случаю, если рассуждать про единственные единицы. Ещё 160 способов. <u>5 случай</u>. Две суммы в столбце равны 5, две другие – 7, аналогично по строкам. Тогда нам надо два столбца с одной двойкой и два столбца с тремя двойками, аналогично со строками. Существует $C_4^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ способов выбора пары столбцов с суммой 5, аналогично пары строк с суммой 5, тогда существует 6²=36 способов выбора двух столбцов и двух строк с суммами 5. На пересечении столбцов и строк с суммой 5 обязательно стоят единицы, иначе при наличии двойки далее получаем в этих рядах единицы, в перпендикулярных рядах с суммой 7 уже стоят только двойки и тогда получим ряд с двумя двойками и суммой 5, что невозможно. Аналогично доказываем, что на пересечении рядов с суммой 7 стоят двойки. Далее на пересечении двух столбцов с суммой 5 и строк с суммой 7 оставшиеся две двойки можно поставить двумя способами. Аналогично со строками с суммой 5 и столбцами с суммой 7. Таким образом, этот случай даёт 36·2·2=144 способа. А всего имеем 24·2+160·2+144=512 способов. *<u>Решение</u>* <u>2</u> *<u>(рождается после того, как становится известным ответ)</u>:* Возьмём левый верхний квадрат 3×3 и заполним его 1 и 2 случайным образом – всего 2^9=512 способов. После этого однозначно заполняются четвёртые клетки трёх выделенных столбцов и трёх выделенных строк. При (1, 1, 1) добавляется 2 до суммы 5, при (1, 1, 2) добавляется 1 до суммы 5, при (1, 2, 2) добавляется 2 до суммы 7, при (2, 2, 2) добавляется 1 до суммы 7. Теперь правая нижняя клетка аналогично однозначно определяется по трём верхним клеткам правого столбца. И при этом сумма в нижней строке также окажется простой, т.к. суммы всех сумм по строкам и столбцам равны между собой, тогда четвертая сумма также окажется однозначно определяемой по количеству сумм 5 и 7 по строкам и столбца Действительно, если в трёх верхних строках и в трёх левых столбцах одинаковые наборы сумм, то и нижняя сумма будет такой же, как в правом столбце. Если же, например (с приоритетом столбцов аналогично), в трёх верхних строках сумм 7 будет на одну больше, чем сумм 7 в трёх левых столбцах, то в правом столбце будет сумма 5, а в нижней строке сумма 7, иначе при сумме 7 в правом столбце**

в нижней строке должна оказаться сумма 9, что невозможно, т.к. суммы не больше 8. Если же, например, в трёх верхних строках сумм 7 будет хотя бы на две больше, чем сумм 7 в трёх левых столбцах, то получается, что в трёх верхних клетках правого столбца должны оказаться хотя бы 4 двойки, что невозможно. Значит, последний случай невозможен. Таким образом, расстановка чисел таблицы полностью определяется девятью клетками левого верхнего квадрата 3×3.)

14. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с $\angle B=\angle C=120°$ и со сторонами $AB=3$, $BC=x$, $CD=4$ и $AD=\sqrt{x^2+25}$. Найдите x. **(<u>12/7</u>. Достроим наш четырёхугольник до треугольника ADK, где треугольник BCK – равносторонний. Тогда по теореме косинусов получим $x^2+25=AD^2=AK^2+DK^2-2AK\cdot KD\cdot\cos\angle AKD=(3+x)^2+(4+x)^2-2(3+x)(4+x)/2=9+6x+x^2+16+8x+x^2-12-7x-x^2=x^2+25+7x-12$, откуда $7x-12=0$.)**



15. В однокруговом шахматном турнире участвовало 30 шахматистов. У какого наибольшего числа шахматистов по окончании турнира могло оказаться ровно 5 очков? (победа – 1 очко, ничья – 1/2 очка, поражение – 0 очков) **(<u>11</u>, например, когда 11 шахматистов сыграют между собой вничью и проиграют всем остальным шахматистам. Предположим, что могло быть хотя бы 12 шахматистов с 5 очками. Между собой такие 12 человек сыграли 12·11/2=66 партий и разыграли 66 очков, т.е. в сумме уже набрали не менее 66 очков, что больше 12·5=60 очков, которые они имеют. Противоречие.)**

16. Числа от 1 до 63 разбиты на 10 групп, в каждой группе подсчитано произведение входящих в неё чисел. Какое наибольшее значение может иметь наибольший общий делитель получившихся произведений? *Ответ дать числом в десятичной записи.* **($2^5\cdot3^3\cdot5=$<u>4320</u>. Произведение этих 63 чисел 63! в своём разложении на простые множители содержит** $\left[\frac{63}{2}\right]+\left[\frac{63}{2^2}\right]+\left[\frac{63}{2^3}\right]+\left[\frac{63}{2^4}\right]+\ldots=31+15+7+3+1=57$ **двоек,** $\left[\frac{63}{3}\right]+\left[\frac{63}{3^2}\right]+\left[\frac{63}{3^3}\right]+\left[\frac{63}{3^4}\right]+\ldots=21+7+2=30$ **троек,** $\left[\frac{63}{5}\right]+\left[\frac{63}{5^2}\right]+\left[\frac{63}{5^3}\right]+\ldots=12+2=14$ **пятёрок,** $\left[\frac{63}{7}\right]+\left[\frac{63}{7^2}\right]+\ldots=9+1=10$ **семёрок, остальные простые множители будут в степенях, меньших 10. Значит, НОД десяти возможных произведений может содержать двойку в максимум** $\left[\frac{57}{10}\right]=5$ **степени, тройку в максимум** $\left[\frac{30}{10}\right]=3$ **степени, пятёрку в максимум** $\left[\frac{14}{10}\right]=1$ **степени, семёрку в максимум** $\left[\frac{10}{10}\right]=1$ **степени, остальные же простые числа не могут входить в НОД, т.к. встречаются меньше 10 раз. Но при этом семёрка встречается только в 9 числах (в числе 49 она встречается 2 раза), значит, она также не может входить в НОД. Значит, НОД≤$2^5\cdot3^3\cdot5$=4320. Приведём пример, когда НОД=4320, при этом числа будем записывать разложенными на простые множители, чтобы было видно 5 двоек, 3 тройки и 1 пятёрка в разложении на простые множители произведения всех чисел каждой группы, при этом начнём с пятёрок, продолжим с тройками, затем закончим двойками. Числа, неуказанные в таблице, разбросаем по группам произвольным образом, т.к. они уже не влияют на НОД.)**

5	$2\cdot5$	$3\cdot5$	$2^2\cdot5$	5^2	$2\cdot3\cdot5$	$2^3\cdot5$	$3^2\cdot5$	$2\cdot5^2$	$2^2\cdot3\cdot5$
3	3^2	$2\cdot3^2$	$2^3\cdot3$	3^3	$2^2\cdot3^2$	$2\cdot7\cdot3$	$2^4\cdot3$	$2\cdot3^3$	$7\cdot3^2$
$2\cdot3$	$7\cdot3$		$11\cdot3$			$17\cdot3$			
$2^2\cdot3$			$13\cdot3$			$19\cdot3$			
2	2^3	2^4		2^5	2^2	$13\cdot2$	$17\cdot2$	$7\cdot2^2$	$11\cdot2^2$
$7\cdot2$	$11\cdot2$							$19\cdot2$	$23\cdot2$