**Двенадцатый Южный математический турнир**
**ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2017**

**Гранд-лига. 1 тур. 20.09.17**

**1.** Даны натуральные числа $n$ и $m$ такие, что $n > m + 10 > 100$. Министры Петя и Вася играют в игру. У них есть карта с $n$ городами. В начале Петя соединяет их $k \geqslant n$ дорогами, причем так, чтобы от любого города по дорогам можно было доехать до любого другого. Любые два города можно соединить не более чем одной дорогой. Затем Петя отмечает два города $A$ и $B$ и помещает в город $A$ фишку. Далее каждым своим ходом Вася перемещает фишку в город, куда от текущего положения фишки можно добраться, проехав не более чем по $m$ дорогам. Петя же своим ходом разрушает одну дорогу. Если Вася в некоторый момент оказывается в городе $B$, то он побеждает. Иначе выигрывает Петя. При каком наибольшем $k$ Петя может выиграть, как бы ни играл Вася?

**2.** Куб $50 \times 50 \times 50$ разрезан на несколько параллелепипедов $1 \times 1 \times 8$ и две связные фигурки, состоящие из четырех единичных кубиков. Докажите, что эти фигурки равны.

**3.** Пусть $k > 2$ — целое число. Натуральное число $m$ назовем *хорошим*, если числа $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ можно разбить на два множества так, чтобы сумма чисел в одном из них была в $m$ раз больше, чем в другом. Докажите, что минимальное хорошее число взаимнопросто с числом $k$.

**4.** Найдите все тройки $a, b, c$ целых чисел такие, что $a$ делится на $b+c$, $b$ делится на $c+a$, $c$ делится на $a+b$.

**5.** Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x+y)$$

для всех действительных чисел $x$ и $y$.

**6.** Сколькими способами можно разбить прямоугольник $4 \times 100$ на Т-тетрамино?

**7.** Даны простое число $p > 2$ и натуральные числа $x, y \leqslant \dfrac{p-1}{2}$. Докажите, что если $x(p-x)y(p-y)$ – точный квадрат, то $x = y$.

**8.** Решите систему уравнений: $x + \dfrac{1}{x} = y^2 + 1$; $y + \dfrac{1}{y} = z^2 + 1$; $z + \dfrac{1}{z} = x^2 + 1$.

**9.** Точка $I$ – центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника $ABC$ с углом $\angle A = 60^\circ$. Точки $E$ и $F$ – основания биссектрис углов $\angle ABC$ и $\angle ACB$ соответственно. Различные точки $P$ и $Q$ таковы, что треугольники $PEF$ и $QEF$ равносторонние. Докажите, что $OI \perp BC$, где $O$ — центр описанной окружности треугольника $APQ$.

**10.** Точки $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ — соответственно середины сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ выпуклого четырехугольника $ABCD$. В пересечении отрезков $AB'$, $BC'$, $CD'$, $DA'$ образуется выпуклый четырехугольник $KLMN$. Найдите отношение площадей четырехугольников $ABCD$ и $KLMN$, если известно, что $AB' \parallel CD'$.