Лига «Премьер». 1 тур. 20 сентября.

1. Будем говорить, что положительные числа $a>b$ «почти равны», если $\frac{a-b}{a} < 0{,}01$. Докажите, что если в треугольнике «почти равны» два угла (в радианной мере), то противоположные стороны также «почти равны».

2. Дано натуральное число $n>10$. Министры Петя и Вася играют в игру. У них есть карта с n городами. В начале игры Петя соединяет их $k\geq n$ дорогами так, чтобы от любого города по дорогам можно было доехать до любого другого и любые два города были соединены не более, чем одной дорогой. Затем Петя отмечает два города A и B и помещает в город A фишку. Далее они ходят по очереди: Вася каждым своим ходом перемещает фишку в город, куда от текущего положения фишки можно добраться, проехав не более чем по двум дорогам, Петя же своим ходом разрушает одну дорогу. Если Вася в некоторый момент оказывается в городе B, то он побеждает. Иначе выигрывает Петя.При каком наибольшем k Петя может выиграть, как бы не играл Вася?

3. Сколькими способами можно разбить прямоугольник 4×100 на Т-тетрамино?

4. Пусть p – нечётное простое число, x, y – натуральные числа, не превосходящие $\frac{p-1}{2}$. Докажите, что если $x(p-x)y(p-y)$ – точный квадрат, то $x=y$.

5. Дана конечная строка из нулей и единиц, заканчивающаяся нулём. Докажите, что можно расставить плюсы между некоторыми цифрами так, чтобы полученная сумма, вычисленная как сумма чисел в двоичной системе счисления (числа могут начинаться с нуля), равнялась $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]$ для некоторого натурального n.
($[x]$ – целая часть числа x).

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=y^2+1, \\ y+\dfrac{1}{y}=z^2+1, \\ z+\dfrac{1}{z}=x^2+1. \end{cases}$$

7. Пусть ABC – неравнобедренный треугольник с углом $\angle BAC = 60^o$. Обозначим через E и F основания биссектрис углов $\angle ABC$ и $\angle ACB$ соответственно. Пусть P, Q – различные точки такие, что ΔPEF и ΔQEF – равносторонние. Докажите, что $OI \perp BC$, где O – центр описанной окружности треугольника APQ, I – центр вписанной окружности треугольника ABC.

8. Сумма вещественных чисел a, b, c и d равна 0. Обозначим суммы $N=ab+bc+cd$ и $K=ac+ad+bd$. Докажите, что хотя бы одна из сумм $20N+17K$ и $17N+20K$ не положительна.