Группа Старт. Высшая лига. Финал

25 сентября

1. Докажите, что в любом слове, в котором различных букв не более 10 (например, ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ), можно заменить буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами) так, что получившееся число будет делиться на 9.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки E и D соответственно. Оказалось, что $\angle ABD + \angle BCE = \angle ACE + \angle CBD$ и $BD = CE$. Докажите, что $AB = AC$.

3. Дано бесконечное множество M рациональных чисел. Известно, что произведение любых 2017-и из них — целое число, которое не делится ни на какую 2017-ю степень простого числа. Докажите, что множество M состоит только из целых чисел.

4. Каждое из положительных действительных чисел a, b, c не превосходит 2. Докажите неравенство $a + b + c + 2 \geqslant abc$.

5. Анна и Банана играют в следующую игру. В начале Анна пишет какое-то слово W, после этого Банана называет целое неотрицательное число $k \geqslant 2$. Если Анна сможет написать слово S, для которого существует ровно k способов вычеркнуть некоторые буквы так, чтобы получилось слово W, то она побеждает. Иначе побеждает Банана. Сколько существует 8-буквенных слов W, состоящих из букв А, Б, В, Г, Д, для которых Анна может выиграть вне зависимости от числа, которое назовёт Банана?

6. На координатной плоскости расположено несколько *стен* — непересекающихся (в том числе по вершинам) отрезков, не параллельных осям координат. Точечный бульдозер стартует из некоторой точки плоскости параллельно одной из осей координат. Каждый раз, когда бульдозер встречает стену, он поворачивает на 90 градусов так, чтобы продолжить движение. Через стену бульдозер ездить не умеет, стены в их концах не встречает. Докажите, что бульдозер никогда не сможет встретить каждую стену с обеих сторон.

7. На каждой стороне треугольника отмечено по точке, а внутри треугольника — точка P. Точку P соединили с вершинами и отмеченными точками на сторонах. Могут ли все шесть образовавшихся треугольников быть равнобедренными?

8. На плоскости нарисован квадрат 4×4, разбитый на 16 квадратиков 1×1. Некоторые из сторон квадратиков покрасили в красный цвет, после этого в каждом квадратике написали, сколько у него красных сторон. Написанные числа оказались равны 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3. Какое наименьшее количество красных сторон (т. е. красных отрезков длины 1) может быть?