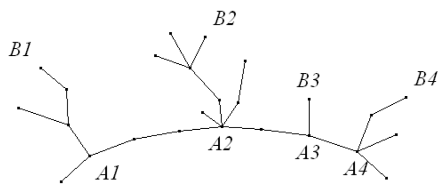
0–0. Найдите все натуральные n такие, что $n!$ оканчивается ровно на 100 нулей. (**$n \in \{405, 406, 407, 408, 409\}$. Количество нулей на конце числа $n!$ равно степени вхождения 5 в разложение на простые множители, что больше степени вхождения 2. Нужная нам степень вхождения 5 в число 405! согласно формуле Лежандра равна** $e_5(n) = \left[\frac{405}{5}\right] + \left[\frac{405}{5^2}\right] + \left[\frac{405}{5^3}\right] + \ldots = 81 + 16 + 3 = 100$**, для чисел до 409 включительно она также будет равна 100, для больших 409 она уже будет больше 100, а для меньших 405 она будет меньше 100.)**

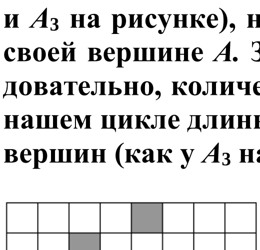
0–1. Найдите все равнобедренные треугольники, у которых все три угла (в градусах) численно равны простым числам. **(<u>Все треугольники с углами 2°, 89° и 89°</u>. Сумма трёх целых чисел чётна (180), значит, хотя бы один из углов должен равняться чётному простому числу, а это только 2, тогда два остальных угла равны 89°, т.к. при ещё одном угле в 2° третий угол (176°) уже не будет равен простому числу.)**

0–2. У каждого из двух десятизначных чисел все цифры различны, а у их суммы все цифры одинаковы. Чему может равняться эта сумма? *Приведите вес варианты ответа и примеры к ним.* **(<u>Только 9 999 999 999, например, 1 234 567 890+8 765 432 109 = 9 999 999 999</u>. Числа 1 111 111 111, …, 8 888 888 888 и 11 111 111 111 получиться не могут, потому что не делятся на 9, а оба слагаемых — делятся, потому что делятся на 9 суммы их цифр. Числа, большие 11 111 111 111, записываемые одинаковыми цифрами, не могут получиться, потому что любая сумма двух десятизначных чисел меньше, чем 20 000 000 000.)**

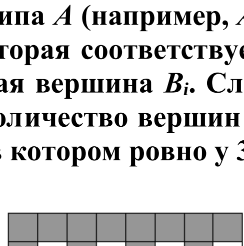
0–3. Дано $n \geq 2$ кучек с попарно различным количеством монет. За один ход можно выбрать любые две кучки и добавить в них по одной монете. При каких n можно гарантированно уравнять количества монет во всех кучках? **(<u>При нечётных $n \geq 3$</u>. При чётном n в кучках в сумме могло быть изначально нечётное количество монет, в результате данных операций суммарное количество монет, увеличиваясь за ход на 2, всегда будет оставаться нечётным, значит, не будет делиться на чётное n, т.е. все кучки невозможно сделать равными. В случае нечётного количества кучек разобьём все кучки, кроме самой большой, на пары. Затем по очереди меньшую кучку каждой пары и самую большую кучку набора увеличиваем до равенства меньшей кучки пары со своей напарницей. Получим пары равных кучек и одну самую большую кучку. Теперь в каждой паре равных кучек доводим количество монет до максимальной кучки.)**



0–4. В графе на 100 вершин самый короткий цикл содержит 70 вершин. Какое минимальное количество вершин со степенью не более 2 могло быть? **(<u>70 вершин</u>. Рассмотрим наш цикл длины 70. Пусть в нём есть особые вершины (типа *A* – см. рис.), у которых степень не меньше 3. Тогда к каждой такой вершине подсоединено дерево. Действительно, не могло оказаться пути от вершины A_k до вершины A_n, где номера k и n – натуральные числа, не превышающие 100–70=30. Иначе этот путь был бы длины максимум 31 (другие 30 вершин – максимум 31 дорога) и с одним из кратчайших кусков цикла (не более 70:2=35) дал бы нам цикл длины не более 31+35=66<70 – противоречие. Кроме того, в каждом таком куске не могло быть цикла, т.к. иначе он был бы не длиннее 31<70 – противоречие. Значит, каждый такой кусок (связный граф без циклов) будет деревом. А в дереве есть хотя бы 2 висячие вершины, одной из которых могла быть сама вершина типа *A* (например, A_1 и A_3 на рисунке), но обязательно есть ещё другая висячая вершина типа *B*, которая соответствует своей вершине *A*. Значит, каждой особой вершине A_i соответствует своя висячая вершина B_i. Следовательно, количество вершин со степенью не более 2 будет не меньше, чем количество вершин в нашем цикле длины 70. В качестве примера подойдёт граф-цикл из 70 вершин, в котором ровно у 30 вершин (как у A_3 на рис.) есть по одной подсоединённой вершине.)**



0–5. Вырежьте из доски 8×8 десять клеток так, чтобы из оставшихся клеток нельзя было вырезать по линиям сетки прямоугольник площади, не меньшей 8. **(см. рисунок – методом "пропеллера")**



0–6. Какое наименьшее количество квадратов 2×2 с равным количеством белых и чёрных клеток может быть на доске 8×8, на которой по 32 белых и чёрных клетки? Приведите ответ и пример. **(<u>0</u>, см. пример)**

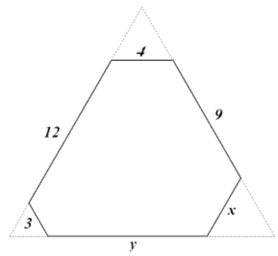
1–1. Какая обыкновенная несократимая дробь при переводе в десятичную даёт число 0,201820182018…? (**$\frac{2018}{9999}$. Пусть это число равно x, тогда $10000x=2018+x$, откуда и найдём $x=2018/9999$, но эта дробь не сократима.)**

1–2. Сколько существует чётных натуральных чисел, у которых неполное частное от деления на 2018 равно остатку? **(1008. Наши числа должны иметь вид $2018n+n=2019n$, где n – остаток от деления на 2018, т.е. целое число в пределах от 0 до 2017. Но при $n=0$ число $2019n=0$ – не натуральное, в остальных же 2017 случаях $2019n$ будет натуральным числом, при этом чётным оно окажется при всех чётных n от 2 до 2017 – всего 1008 чисел.)**

1–3. В одной компании было $n\geq 2$ человек (каждый – рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, всегда говорящий неправду). Каждый произнёс одну фразу: «Среди всех остальных (не считая меня) не больше 5 рыцарей и не больше 8 лжецов». Сколько рыцарей могло быть в этой компании? **(0 и от 2 до 6 рыцарей. 1) Если в компании нет рыцарей, то каждый из лжецов в своей лживой фразе сказал правду про рыцарей, значит, солгал про лжецов. Тогда лжецов в такой компании будет не меньше 9+1=10, что возможно при отсутствии рыцарей. 2) Если в компании есть рыцарь, то рыцарей в сумме будет не больше 6, а лжецов – не больше 8, всего же людей будет не больше 14. Если лжецов не будет вообще, то тогда подойдёт любой вариант от 2 до 6 рыцарей. Если же лжецы есть, то каждый лжец скажет правду про количество лжецов и вынужден солгать про количество рыцарей. Значит, рыцарей не меньше 6. С учётом фразы рыцаря получаем, что в этом случае у нас ровно 6 рыцарей.)**

1–4. Решите уравнение $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$. **($1, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. $x^4+x^3-4x^2+x+1 = (x^2-1)^2+x(x-1)^2 = (x-1)^2((x+1)^2+x) = (x-1)^2(x^2+3x+1) = 0$, откуда и находим корни)**

1–5. По кругу выписаны 2018 чисел. Если взять любое из этих чисел и умножить на стоящее за ним по часовой стрелке, то полученное произведение будет больше взятого числа. Какие значения может принимать сумма всех выписанных чисел? **($S<0$ или $S>2018$. Среди этих чисел нет 0, т.к. тогда не выполнится условие на произведение 0 и следующего числа. Если среди чисел есть положительное число x, то для него и следующего по часовой стрелке числа y выполняется неравенство $xy>x$, откуда $y>1$, т.е. тоже положительное число. Значит, все числа по кругу будут положительны и больше 1, тогда их сумма больше 2018. Причём любая $S>2018$ нам подойдёт, например, когда все числа равны $S/2018>1$. Если среди чисел есть отрицательное число x, то для него и следующего числа y выполняется неравенство $xy>x$, откуда $y<1$, но при этом не может быть $y\geq 0$ согласно рассуждениям выше. Значит, все числа по кругу будут отрицательны, тогда их сумма меньше 0. Причём любая $S<0$ нам подойдёт, например, когда все числа равны $S/2018<0$.)**



1–6. В выпуклом шестиугольнике с углами в 120° четыре подряд идущие стороны равны 3, 12, 4 и 9. Найдите длины двух других сторон. **(6 и 10. Пусть следующие две стороны равны x и y. Построим на сторонах 3, 4 и x наружу три равносторонних треугольника. Получим правильный треугольник, в который вписан исходный шестиугольник. У этого треугольника сторона равна $3+12+4=4+9+x=x+y+3$, откуда $x=6$, $y=10$.)**

2–2. Действительные числа x и y удовлетворяют условию $x^2-\frac{2}{y}=y^2-\frac{2}{x}$. Найдите все пары x и y такие, что $xy(x+y)=2$. **(Все пары вида $\left(x=\frac{-y^2\pm\sqrt{y^4+8y}}{2y},\ y\right)$, где $y\in(-\infty;-2]\cup(0;+\infty)$.**

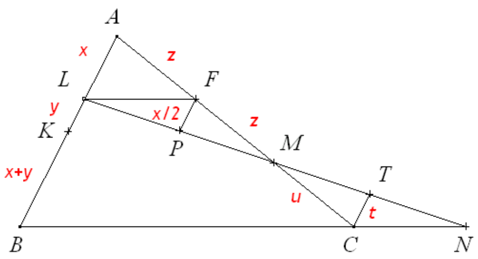
$x^2-\frac{2}{y}=y^2-\frac{2}{x} \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=\frac{2(x-y)}{xy}$, которое при различных ненулевых x и y равносильно равенству $xy(x+y)=2$. Решая его как квадратное уравнение относительно x, находим, что $x=\frac{-y^2\pm\sqrt{y^4+8y}}{2y}$, где $y\in(-\infty;-2]\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. Если же $x=y$, то требуемое равенство превращается в равенство $2x^3=2$, откуда $x=1$, значит, подойдёт ещё одна пара $x=y=1$, которая удовлетворяет вышеприведённой формуле при $y=1$.)

2–3. При каких натуральных $n\geq 2$ полный граф K_n будет иметь эйлеров путь? **(2 и любое нечётное натуральное $n\geq 3$, т.к. по критерию эйлеровости граф должен быть связным (полный граф – связен) и иметь не более 2 нечётных вершин, что возможно только при нечётных n (все вершины будут чётными) и $n=2$ (2 нечётных вершины степени 1)**

2–4. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению $a^2+b^2+ab = cd$. Какой остаток при делении на 4 может быть у суммы $a^2+b^2+c^2+d^2$? (**<u>0, 1 или 3</u>. Пусть $a+b=k$, $c+d=n$ – натуральные числа. Тогда с учётом исходного соотношения получаем, что натуральное число $a^2+b^2+c^2+d^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2cd-2(a^2+b^2+ab) = (c^2+d^2+2cd)-(a^2+b^2+2ab) = (c+d)^2-(a+b)^2 = n^2-k^2 = (n-k)(n+k)$, где $n-k$ и $n+k$ – числа одной чётности. Значит, их произведение либо нечётно, либо делится на 4. Значит, $a^2+b^2+c^2+d^2$ может иметь остаток 0, 1 или 3 при делении на 4, причём все три случая возможны. 1). $a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 0$ (*mod* 4) при $a=b=c=1$ и $d=3$; 2) $a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 1$ (*mod* 4) при $a=b=2$, $c=1$ и $d=12$; 3) $a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 3$ (*mod* 4) при $a=2$, $b=c=1$ и $d=7$. *<u>Комментарий</u>: также можно разобрать варианты чётности чисел.***)

2–5. При каких значениях параметра b уравнение $x^2+bx+2018=0$ имеет два различных целых корня? (**<u>$b\in\{\pm 2019, \pm 1011\}$</u>. По теореме Виета произведение корней равно свободному члену $2018=1\cdot 2018=2\cdot 1009$, тогда сумма корней с учётом знака $(1+2018, (-1)+(-2018), 2+1009, (-2)+(-1009))$ равна $-b$, откуда и находим все возможные значения для b.**)

2–6. Прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC и прямую BC в точках L, M и N соответственно, причем $2AL < AB$. Точки F, K и T — середины отрезков AM, AB и MN соответственно, причём прямые LF и BC параллельны. Какие значения может принимать отношение $TC:KL$? (**<u>1:1</u>. Введём длины отрезков так, как показано на рисунке: $AL=x$, $LK=y$, $BK=AK=x+y$, $AF=FM=z$, $MC=u$, $CT=t$. В силу параллельности LF и CN треугольники LFM и NCM будут подобны, тогда подобны и треугольники PFM и TCM, где P – середина LM, значит, $PF\|TC$, но при этом PF – средняя линия в треугольнике LAM, значит, $PF\|LA$ и $PF=x/2$, следовательно, $CT\|PF\|LA\|LK$. Из подобия треугольников ALF, ABC (в силу параллельности LF и BC) и PFM, TCM получаем, что $\frac{x}{z}=\frac{2(x+y)}{2z+u}$ и $\frac{x/2}{z}=\frac{t}{u}$. Тогда, разделив первое равенство на 2 и воспользовавшись свойством ряда равных отношений получим, что $\frac{t}{u}=\frac{x}{2z}=\frac{x+y}{2z+u}=\frac{(x+y)-x}{(2z+u)-2z}=\frac{y}{u}$, значит, $t=y$, т.е. $CT=LK$, т.е. нужное нам отношение равно 1.**)

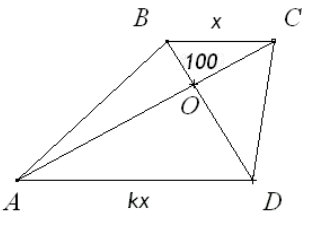


3–3. При каких действительных x сумма $|x|+|x+1|+|x+3|+|x+4|$ принимает наименьшее значение? (**<u>$-3\le x\le -1$</u>. Это алгебраическое выражение равно сумме расстояний на числовой прямой от точки x до точек 0, –1, –3, –4. Минимальное значение 6 будет достигаться во всех точках отрезка [–3;–1], при выходе за его пределы сумма расстояний начнёт увеличиваться.**)

3–4. На острове живут три племени: рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, которые иногда говорят правду, а иногда лгут. За круглым столом сидят 2018 представителей всех трёх племен. Каждый из сидящих за столом произнёс две фразы: 1) «Слева от меня сидит лжец.» 2) «Справа от меня сидит хитрец.» Сколько хитрецов могло быть среди них? (**<u>Любое чётное число от 674 до 2016</u>. Из утверждения рыцаря следует, что около него люди сидят так ЛРХ (лжец-рыцарь-хитрец), при этом слева от Л не может сидеть ни Л, ни Р, значит, там сидит Х. Далее может сидеть несколько Х, причём в некоторый момент после них может сидеть только Р и опять повтор ситуации ЛРХ. Значит, у нас есть несколько пар ЛР (не менее одной по условию), между которыми может сидеть любое количество Х. Но при это троек ЛРХ не более [2018:3]=672, т.е. пар ЛР будет от 1 до 672. Тогда Х будет всегда чётным числом от 2018–2·672=674 до 2018–2=2016. И все варианты возможны, когда между *N* парами ЛР сидят Х, которых будет заведомо больше чем *N*.**)

3–5. n волейбольных команд участвуют в кубковом турнире на выбывание. Команда, проигравшая три матча, выбывает из дальнейшей борьбы. Турнир продолжается до тех пор, пока не останется одна команда-победитель. При каких n могло случиться так, что каждая команда сыграла с каждой ровно по одному матчу? (**<u>6</u>. В каждом матче одна команда проигрывает, значит, всего было сыграно $n\cdot(n-1)/2 = 3(n-1)+a$ матчей, где a – количество поражений победителя (0, 1 или 2). Тогда $n=6+2a/(n-1)$, откуда $n\ge 6$. Но в этом случае неотрицательное число $2a/(n-1)\le 4/5<1$, значит, $n=6$. При этом такой турнир существует, если сначала 5 команд выиграли и проиграли между собой по 2 матча (поставим их по кругу и пусть каждая команда выиграла у двух следующих и проиграла двум предыдущим). После этого 6-я команда выиграла по очереди всех остальных, обеспечив им вылет из турнира.**)

3–6. Найдите отношение длин оснований $AD:BC$ трапеции $ABCD$ площади 2018, если площадь треугольника BCO равна 100 (O – точка пересечения диагоналей трапеции). (**<u>$k=\sqrt{20{,}18}-1$</u>. Пусть $AD:BC=k$, тогда $S_{ADO}=k^2\cdot S$, где $S=100=S_{BCO}$, в силу подобия треугольников ADO и BCO с коэффициентом k. $S_{ABO}=S_{CDO}$, т.к. дополняют треугольник BCO до равновеликих треугольников ABC и DBC ($AD\|BC$). Из формулы площади треугольников**

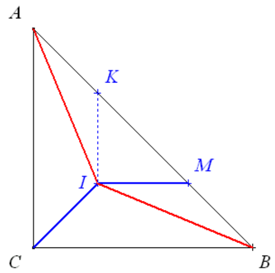


через синус следует, что $S_{ABO}\cdot S_{CDO}= S_{ADO}\cdot S_{BCO}=k^2\cdot S^2$, значит, $S_{ABO}=S_{CDO}=kS$, тогда вся площадь трапеции равна 2018= $k^2\cdot S+S+2kS=(k+1)^2\cdot S=100(k+1)^2$, откуда $k=\sqrt{20{,}18}-1$.)

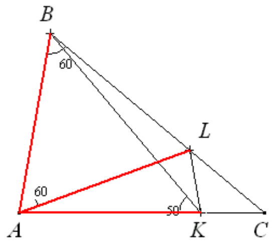
4–4. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×3 можно гарантированно вырезать из доски 8×8 с 5 предварительно удалёнными клетками? **(<u>16 триминошек</u>. При диагональной раскраске в три цвета у нас будет 22 клетки первого цвета и по 21 клетке второго и третьего цвета. Если удалены изначально сразу 5 клеток второго цвета, то мы сможем вырезать максимум 21–5=16 триминошек, т.к. каждая триминошка содержит свою клетку второго цвета. При этом всегда можно гарантированно вырезать 16 триминошек. Для этого на поле 8×8 выделим 21 триминошку (например, методом пропеллера), из которых удалённые клетки могут испортить нам максимум 5 триминошек.)**

4–5. Натуральное число назовём *сложным*, если его можно представить в виде суммы как четырёх, так и пяти последовательных натуральных чисел. Сколько существует сложных четырёхзначных чисел? **(<u>450</u>. Сложное число равно двум суммам $(k-1)+k+(k+1)+(k+2)=4k+2$ и $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=5n$, при натуральных $k\geq 2$ и $n\geq 3$, т.е. оно кратно 5 и даёт остаток 2 при делении на 4, причём любое такое число подходит, т.к. по нему можно найти и k, и n. Наименьшее сложное число равно 30, а все остальные идут через 20=4·5, т.е. они имеют остаток 10 от деления на 20. Значит, это будут четырёхзначные числа от 1010=50·20+10 и до 9990=499 20+10, т.е. таких чисел будет ровно 499–(50–1)=450.)**

4–6. Разрежьте равнобедренный прямоугольный треугольник на 4 треугольника так, чтобы три из них были равны между собой, и любым из этих трёх можно было накрыть не равный им четвёртый. **(Рассмотрим (см. рис.) точку I пересечения биссектрис нашего равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90°$) (I – центр вписанной окружности треугольника). Тогда треугольники ACI и BCI равны по двум сторонам и углу между ними ($AC=BC$, CI – общая, $\angle ACI=\angle BCI$). Пусть точки M и K симметричны точке C относительно биссектрис AI и BI соответственно. Тогда треугольники ACI и AMI равны как симметричные относительно AI, а треугольники BCI и BKI равны как симметричные относительно BI, т.е. все эти четыре треугольника равны между собой (выше доказано равенство треугольников ACI и BCI). Значит, если мы разрежем исходный треугольник на треугольники ACI, BCI, AMI и BMI, то первые три треугольника равны между собой, а четвёртый треугольник накрывается каждым из этих трёх, т.к. треугольник BMI является частью равного им треугольника BKI.)**



5–5. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка K, а на стороне BC — точка L так, что $\angle KBC = 10°$ и $\angle LAC = 20°$. Найдите величину угла ALK, если известно, что $\angle BCA = 40°$ и $\angle BAC = 80°$. **(<u>80°</u>. $\angle ABC = 180°-\angle BCA-\angle BAC = 60°$, $\angle BAL = 80°-\angle LAC = 60°$, значит, треугольник ABL – равносторонний. Заметим, что треугольник ABK равнобедренный, так как $\angle ABK = \angle ABL-\angle KBC = 60°-10°= 50°=180°-80°-50°=180°-\angle BAK-\angle ABK=\angle AKB$. Отсюда получаем, что $AL = AB = AK$. Следовательно, треугольник AKL – равнобедренный с углом 20° при вершине, откуда $\angle ALK = 80°$.)**



5–6. Петя и Вася по очереди выписывают делители натурального числа N. Делитель можно выписать, только если он не выписывался ранее и взаимно прост со всеми ранее выписанными числами. Начинает Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может победить, независимо от игры противника? **(<u>При N=1 выиграет первый, при $N=p^k$ (p – простое) выиграет второй, при остальных N выиграет первый.</u> При N=1 всего 1 ход, при $N=p^k$ (p – простое) всего 2 хода (1 и некоторая степень p). При остальных N первый сначала сходит числом, состоящим из всех различных простых делителей N, кроме одного (p), после этого остаются только два возможных хода – 1 и некоторая степень p.)**

6–6. Пусть $R(n)$ – это разность шестизначного числа n и числа, образованного его первыми тремя цифрами (например, $R(567432)=567432-567=566865$). У скольких шестизначных чисел $R(n)$ будет кратно 9? **(<u>100800</u>. Рассмотрим последовательность по возрастанию номеров, где $R(n)$ – число, получаемое из n с помощью описанной разности. Будем называть шестизначные числа *числами одной тысячи*, если первые три цифры у них совпадают, т.е. первая тысяча чисел – это числа от 100000 до 100999, а последняя тысяча – это числа от 999000 до 999999. Тогда $R(n+1)=R(n)+1$, если n и $n+1$ – числа одной тысячи, т.к. при вычитании из соседних чисел одной тысячи трёхзначного числа (одинакового), образованного первыми тремя цифрами, мы опять получим соседние числа. Если же n и $n+1$ – соседние числа из разных тысяч, то из n мы вычтем некоторое трёхзначное число k, а из $n+1$ мы вычтем уже $k+1$. Значит, $R(n+1)=R(n)$, если n оканчивается на 999. Таким образом, последовательность $\{R(n)\}$ возрастает с шагом 1 и только при переходе к следующей тысяче сохраняет своё значение ровно на одно следующее число. Тогда в нашей последовательности будут все натуральные числа от $R(100000)=99900$ до $R(999999)=999000$, при этом по два раза будут встречаться числа $R(\overline{abc999})=R(\overline{abc999}+1)=\overline{abc999}-\overline{abc}=\overline{abc(9-a)(9-b)(9-c)}$, которые кратны 9 и идут через 999, т.е. кратны 999, т.к. начальное число 99900 также кратно 999. Значит, числа кратные 9 встретятся (999000–99900):9+1=99901 раз, причём все кратные 999, кроме 99900 и 999000, встретятся по два раза, а таких чисел (999000–99900):999–1 = 899. Тогда в нашей последовательности встретится 99901+899=100800 чисел, кратных 9.)**