XIV Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». XI Турнир математических игр.

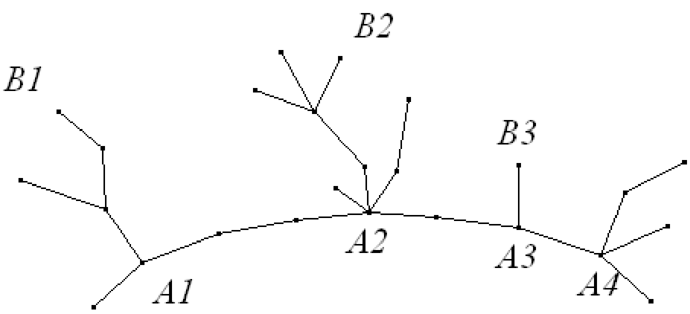
Игра «Домино». ***<u>Старшая лига (10-11 класс).</u>*** **<u>Решения</u>. 09.09.2018**

0–0. Найдите все натуральные n такие, что $n!$ оканчивается ровно на 100 нулей. **(<u>$n \in\{405, 406, 407, 408, 409\}$</u>. Количество нулей на конце числа $n!$ равно степени вхождения 5 в разложение на простые множители, что больше степени вхождения 2. Нужная нам степень вхождения 5 в число 405! согласно формуле Лежандра равна** $e_5(n)=\left[\frac{405}{5}\right]+\left[\frac{405}{5^2}\right]+\left[\frac{405}{5^3}\right]+\ldots=81+16+3=100$**, для чисел до 409 включительно она также будет равна 100, для больших 409 она уже будет больше 100, а для меньших 405 она будет меньше 100.)**

0–1. Решите уравнение $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$. **(**$1, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$**.** $\boldsymbol{x^4+x^3-4x^2+x+1 = (x^2-1)^2+x(x-1)^2 = (x-1)^2((x+1)^2+x) = (x-1)^2(x^2+3x+1) = 0}$**, откуда и находим корни)**

0–2. Дано $n\geq2$ кучек с попарно различным количеством монет. За один ход можно выбрать любые две кучки и добавить в них по одной монете. При каких n можно гарантированно уравнять количества монет во всех кучках? **(<u>При нечётных $n\geq3$</u>. При чётном n в кучках в сумме могло быть изначально нечётное количество монет, в результате данных операций суммарное количество монет, увеличиваясь за ход на 2, всегда будет оставаться нечётным, значит, не будет делиться на чётное n, т.е. все кучки невозможно сделать равными. В случае нечётного количества кучек разобьём все кучки, кроме самой большой, на пары. Затем по очереди меньшую кучку каждой пары и самую большую кучку набора увеличиваем до равенства меньшей кучки пары со своей напарницей. Получим пары равных кучек и одну самую большую кучку. Теперь в каждой паре равных кучек доводим количество монет до максимальной кучки.)**

0–3. В графе на 100 вершин самый короткий цикл содержит 70 вершин. Какое минимальное количество вершин со степенью не более 2 могло быть? **(<u>70 вершин</u>. Рассмотрим наш цикл длины 70. Пусть в нём есть особые вершины (типа A – см. рис.), у которых сте-**

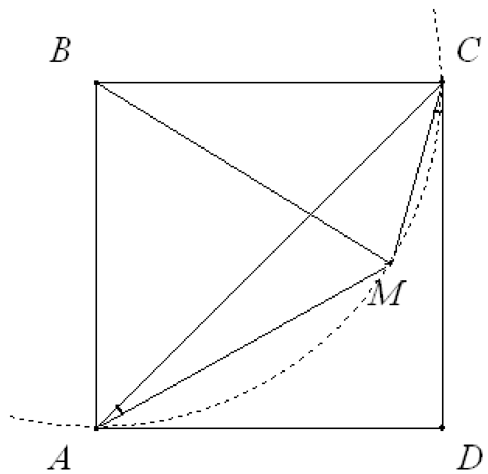


пень не меньше 3. Тогда к каждой такой вершине подсоединено дерево. Действительно, не могло оказаться пути от вершины A_k до вершины A_n, где номера k и n – натуральные числа, не превышающие 100–70=30. Иначе этот путь был бы длины максимум 31 (другие 30 вершин – максимум 31 дорога) и с одним из кратчайших кусков цикла (не более 70:2=35) дал бы нам цикл длины не более 31+35=66<70 – противоречие. Кроме того, в каждом таком куске не могло быть цикла, т.к. иначе он был бы не длиннее 31<70 – противоречие. Значит, каждый такой кусок (связный граф без циклов) будет деревом. А в дереве есть хотя бы 2 висячие вершины, одной из которых могла быть сама вершина типа A (например, A_1 и A_3 на рисунке), но обязательно есть ещё другая висячая вершина типа B, которая соответствует своей вершине A. Значит,

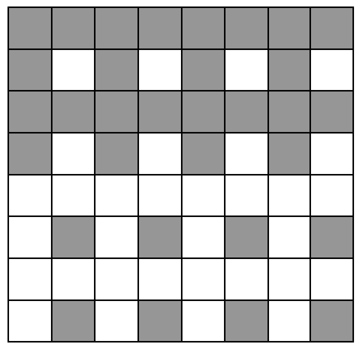
каждой особой вершине A_i соответствует своя висячая вершина B_i. Следовательно, количество вершин со степенью не более 2 будет не меньше, чем количество вершин в нашем цикле длины 70. В качестве примера подойдёт граф-цикл из 70 вершин, в котором ровно у 30 вершин (как у A_3 на рис.) есть по одной подсоединённой вершине.)

0–4. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению $a^2+b^2+ab = cd$. Какой остаток при делении на 4 может быть у суммы $a^2+b^2+c^2+d^2$? **(<u>0,1 или 3</u>. Пусть $a+b=k$, $c+d=n$ – натуральные числа. Тогда с учётом исходного соотношения получаем, что натуральное число $a^2+b^2+c^2+d^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2cd-2(a^2+b^2+ab) = (c^2+d^2+2cd)-(a^2+b^2+2ab) = (c+d)^2-(a+b)^2 = n^2-k^2 = (n-k)(n+k)$, где $n-k$ и $n+k$ – числа одной чётности. Значит, их произведение либо нечётно, либо делится на 4. Значит, $a^2+b^2+c^2+d^2$ может иметь остаток 0, 1 или 3 при делении на 4, причём все три случая возможны. 1). $a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 0 \pmod 4$ при $a=b=c=1$ и $d=3$; 2) $a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 1 \pmod 4$ при $a=b=2$, $c=1$ и $d=12$; 3) $a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 3 \pmod 4$ при $a=2$, $b=c=1$ и $d=7$. *<u>Комментарий</u>: также можно разобрать варианты чётности чисел.*)**

0–5. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$. Найдите величину угла ABM. **(<u>90°–2α</u>. Если точка M лежит внутри треугольника ABC, то $\angle MAC < 45° < \angle MCD$. На диагонали AC точка M также лежать не может, поэтому она лежит внутри треугольника ACD. При этом $\angle AMC = 180° - \angle MAC - (45° - \angle MCD) = 135°$. Это означает, что точка M лежит на дуге окружности радиуса AB с центром B. Поэтому по теореме о вписанном угле $\angle ABM = 2\angle ACM = 90° - 2\alpha$. *<u>Комментарий</u>: «Геометрия – это геометрия треугольника и окружности», поэтому важно видеть окружность тогда, когда её изначально в задаче ещё нет.*)**



0–6. Какое наименьшее количество квадратов 2×2 с равным количеством белых и чёрных клеток может быть на доске 8×8, на которой по 32 белых и чёрных клетки? Приведите ответ и пример. **(<u>0</u>, см. пример)**



1–1. Действительные числа x и y удовлетворяют условию $x^2 - \frac{2}{y} = y^2 - \frac{2}{x}$. Найдите все пары x и y такие, что $xy(x+y)=2$. **(<u>Все пары вида $\left(x = \frac{-y^2 \pm \sqrt{y^4+8y}}{2y},\ y\right)$, где $y\in(-\infty;-2]\cup(0;+\infty)$</u>.**

$$x^2 - \frac{2}{y} = y^2 - \frac{2}{x} \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = \frac{2(x-y)}{xy}$$

, которое при различных ненулевых x и y равносильно равенству $xy(x+y)=2$. Решая его как квадратное уравнение относительно x, находим, что $x = \frac{-y^2 \pm \sqrt{y^4+8y}}{2y}$, где $y\in(-\infty;-2]\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. Если

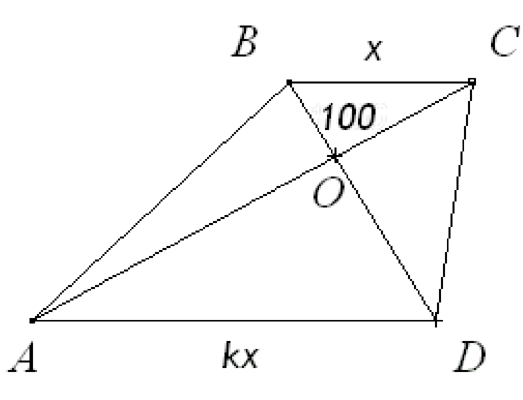
же $x=y$, то требуемое равенство превращается в равенство $2x^3=2$, откуда $x=1$, значит, подойдёт ещё одна пара $x=y=1$, которая удовлетворяет вышеприведённой формуле при $y=1$.)

1–2. При каких натуральных $n\geq 2$ полный граф K_n будет иметь эйлеров путь? **(2 и любое нечётное натуральное $n\geq 3$, т.к. по критерию эйлеровости граф должен быть связным (полный граф – связен) и иметь не более 2 нечётных вершин, что возможно только при нечётных n (все вершины будут чётными) и $n=2$ (2 нечётных вершины степени 1)**

1–3. По кругу выписаны 2018 чисел. Если взять любое из этих чисел и умножить на стоящее за ним по часовой стрелке, то полученное произведение будет больше взятого числа. Какие значения может принимать сумма всех выписанных чисел? **($S<0$ или $S>2018$. Среди этих чисел нет 0, т.к. тогда не выполнится условие на произведение 0 и следующего числа. Если среди чисел есть положительное число x, то для него и следующего по часовой стрелке числа y выполняется неравенство $xy>x$, откуда $y>1$, т.е. тоже положительное число. Значит, все числа по кругу будут положительны и больше 1, тогда их сумма больше 2018. Причём любая $S>2018$ нам подойдёт, например, когда все числа равны $S/2018>1$. Если среди чисел есть отрицательное число x, то для него и следующего числа y выполняется неравенство $xy>x$, откуда $y<1$, но при этом не может быть $y\geq 0$ согласно рассуждениям выше. Значит, все числа по кругу будут отрицательны, тогда их сумма меньше 0. Причём любая $S<0$ нам подойдёт, например, когда все числа равны $S/2018<0$.)**

1–4. При каких действительных x сумма $|x|+|x+1|+|x+3|+|x+4|$ принимает наименьшее значение? **($-3\leq x\leq -1$. Это алгебраическое выражение равно сумме расстояний на числовой прямой от точки x до точек 0, –1, –3, –4. Минимальное значение 6 будет достигаться во всех точках отрезка [–3;–1], при выходе за его пределы сумма расстояний начнёт увеличиваться.)**

1–5. На острове живут три племени: рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, которые иногда говорят правду, а иногда лгут. За круглым столом сидят 2018 представителей всех трёх племен. Каждый из сидящих за столом произнёс две фразы: 1) «Слева от меня сидит лжец.» 2) «Справа от меня сидит хитрец.» Сколько хитрецов могло быть среди них? **(Любое чётное число от 674 до 2016. Из утверждения рыцаря следует, что около него люди сидят так ЛРХ (лжец-рыцарь-хитрец), при этом слева от Л не может сидеть ни Л, ни Р, значит, там сидит Х. Далее может сидеть несколько Х, причём в некоторый момент после них может сидеть только Р и опять повтор ситуации ЛРХ. Значит, у нас есть несколько пар ЛР (не менее одной по условию), между которыми может сидеть любое количество Х. Но при это троек ЛРХ не более [2018:3]=672, т.е. пар ЛР будет от 1 до 672. Тогда Х будет всегда чётное число от 2018–2·672=674 до 2018–2=2016. И все варианты возможны, когда между N парами ЛР сидят Х, которых будет заведомо больше чем N.)**

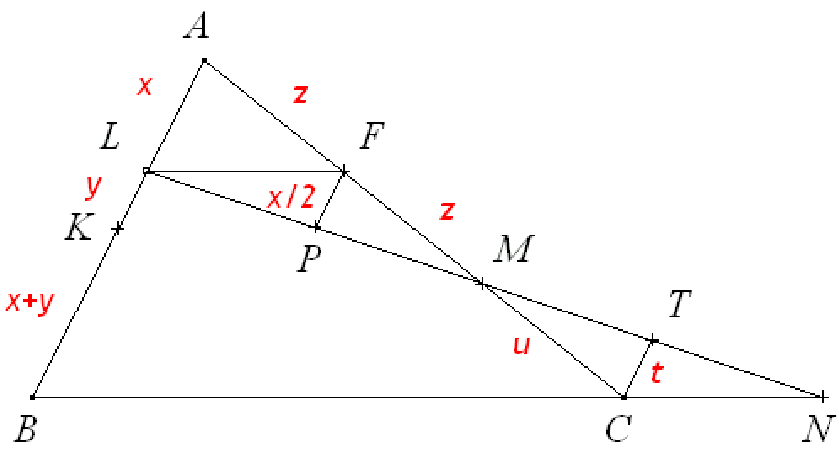


1–6. Найдите отношение длин оснований $AD:BC$ трапеции $ABCD$ площади 2018, если площадь треугольника BCO равна 100 (O – точка пересечения диагоналей трапеции). (<u>$k=\sqrt{20{,}18}-1$</u>. **Пусть $AD:BC=k$, тогда $S_{ADO}=k^2\cdot S$, где $S=100=S_{BCO}$, в силу подобия треугольников ADO и BCO с коэффициентом k. $S_{ABO}=S_{CDO}$, т.к. дополняют треугольник BCO до равновеликих треугольников ABC и DBC ($AD||BC$). Из формулы площади треугольников через синус следует, что $S_{ABO}\cdot S_{CDO}=S_{ADO}\cdot S_{BCO}=k^2\cdot S^2$, значит, $S_{ABO}=S_{CDO}=kS$, тогда вся площадь трапеции равна $2018=k^2\cdot S+S+2kS=(k+1)^2\cdot S=100(k+1)^2$, откуда $k=\sqrt{20{,}18}-1$.)**

2–2. При каких значениях параметра b уравнение $x^2+bx+2018=0$ имеет два различных целых корня? (<u>$b\in\{\pm 2019, \pm 1011\}$</u>. **По теореме Виета произведение корней равно свободному члену 2018=1·2018=2·1009, тогда сумма корней с учётом знака (1+2018, (–1)+(–2018), 2+1009, (–2)+(–1009)) равна $-b$, откуда и находим все возможные значения для b.)**

2–3. Натуральное число назовём *сложным*, если его можно представить в виде суммы как четырёх, так и пяти последовательных натуральных чисел. Сколько существует сложных четырёхзначных чисел? (<u>450</u>. **Сложное число равно двум суммам $(k-1)+k+(k+1)+(k+2)=4k+2$ и $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=5n$, при натуральных $k\geq 2$ и $n\geq 3$, т.е. оно кратно 5 и даёт остаток 2 при делении на 4, причём любое такое число подходит, т.к. по нему можно найти и k, и n. Наименьшее сложное число равно 30, а все остальные идут через 20=4·5, т.е. они имеют остаток 10 от деления на 20. Значит, это будут четырёхзначные числа от 1010=50·20+10 и до 9990=499 20+10, т.е. таких чисел будет ровно 499–(50–1)=450. <u>*Комментарий:*</u> *Можно и сразу сказать, что среди любых 20 подряд идущих чисел ровно одно будет с остатком 10 от деления на 20, а все 9000 четырёхзначных чисел разбиваются на 9000:20=450 групп по 20 подряд идущих чисел, значит, будет ровно 450 сложных чисел. Такое рассуждение, на наш взгляд, является более красивым и математически культурным.*)**

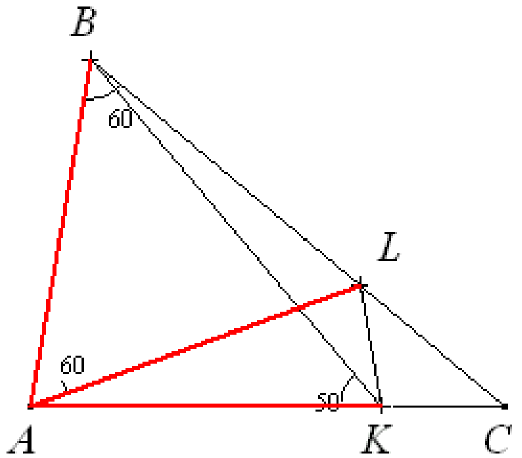
2–4. Прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC и прямую BC в точках L, M и N соответственно, причем $2AL < AB$. Точки F, K и T — середины отрезков AM, AB и MN соответственно, причём прямые LF и BC параллельны. Какие значения может принимать отношение $TC:KL$? (<u>1:1</u>. **Введём длины отрезков так, как показано на рисунке: $AL=x$, $LK=y$, $BK=AK=x+y$, $AF=FM=z$, $MC=u$, $CT=t$. В силу параллельности LF и CN треугольники LFM и NCM будут подобны, тогда подобны и треугольники PFM и TCM, где P – середина LM, значит, $PF||TC$, но при этом PF – средняя линия в треугольнике LAM, значит, $PF||LA$ и $PF=x/2$, следовательно, $CT||PF||LA||LK$. Из подобия треугольников ALF, ABC (в силу параллельности LF и BC) и PFM, TCM получаем, что $\frac{x}{z}=\frac{2(x+y)}{2z+u}$ и $\frac{x/2}{z}=\frac{t}{u}$.**



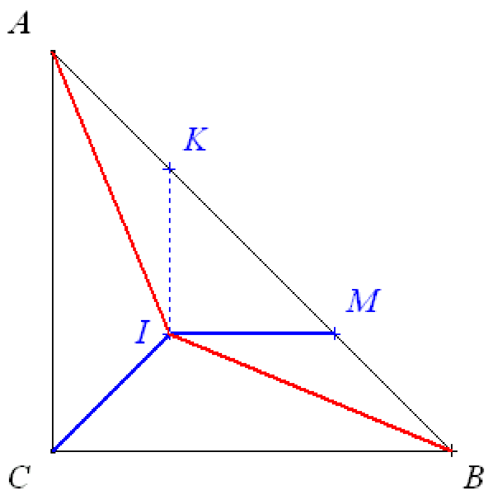
Тогда, разделив первое равенство на 2 и воспользовавшись свойством ряда равных отношений получим, что $\dfrac{t}{u}=\dfrac{x}{2z}=\dfrac{x+y}{2z+u}=\dfrac{(x+y)-x}{(2z+u)-2z}=\dfrac{y}{u}$**, значит,** ***t=y*****, т.е. *CT=LK*, т.е. нужное нам отношение равно 1.)**

2–5. *n* волейбольных команд участвуют в кубковом турнире на выбывание. Команда, проигравшая три матча, выбывает из дальнейшей борьбы. Турнир продолжается до тех пор, пока не останется одна команда-победитель. При каких *n* могло случиться так, что каждая команда сыграла с каждой ровно по одному матчу? **(<u>6</u>. В каждом матче одна команда проигрывает, значит, всего было сыграно $n\cdot(n-1)/2 = 3(n-1)+a$ матчей, где *a* – количество поражений победителя (0, 1 или 2). Тогда $n=6+2a/(n-1)$, откуда $n\geq 6$. Но в этом случае неотрицательное число $2a/(n-1)\leq 4/5<1$, значит, *n*=6. При этом такой турнир существует, если сначала 5 команд выиграли и проиграли между собой по 2 матча (поставим их по кругу и пусть каждая команда выиграла у двух следующих и проиграла двум предыдущим). После этого 6-я команда выиграла по очереди всех остальных, обеспечив им вылет из турнира.)**

2–6. В треугольнике *ABC* на стороне *AC* отмечена точка *K*, а на стороне *BC* — точка *L* так, что $\angle KBC = 10°$ и $\angle LAC = 20°$. Найдите величину угла *ALK*, если известно, что $\angle BCA = 40°$ и $\angle BAC = 80°$. **(<u>80°</u>. $\angle ABC = 180°-\angle BCA-\angle BAC = 60°$, $\angle BAL = 80°-\angle LAC = 60°$, значит, треугольник *ABL* – равносторонний. Заметим, что треугольник *ABK* равнобедренный, так как $\angle ABK = \angle ABL-\angle KBC = 60°-10° = 50° = 180°-80°-50° = 180°-\angle BAK-\angle ABK = \angle AKB$. Отсюда получаем, что $AL = AB = AK$. Следовательно, треугольник *AKL* – равнобедренный с углом 20° при вершине, откуда $\angle ALK = 80°$.)**



3–3. Найдите корни уравнения $x^4+6x^3-7x^2-18x+12=0$ и запишите их в порядке возрастания. **(**<u>$-3-\sqrt{13}; -\sqrt{3}; \sqrt{13}-3; \sqrt{3}$.</u> **Данный многочлен раскладывается на множители $(x^2-3)(x^2+6x-4)=0$, откуда уже и находим корни.)**

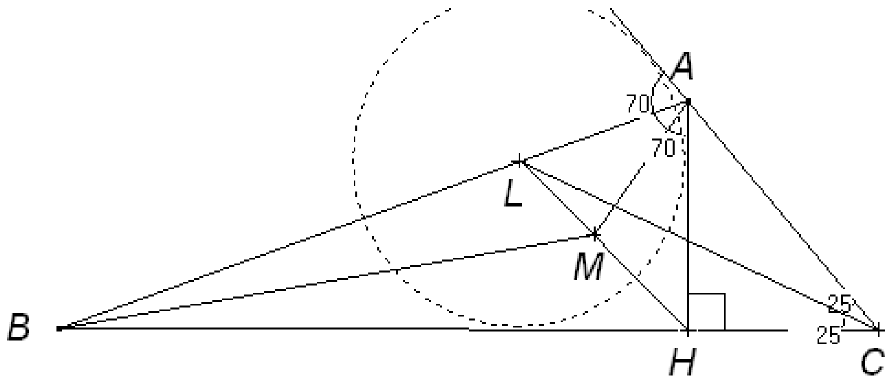


3–4. Разрежьте равнобедренный прямоугольный треугольник на 4 треугольника так, чтобы три из них были равны между собой, и любым из этих трёх можно было накрыть не равный им четвёртый. **(Рассмотрим (см. рис.) точку *I* пересечения биссектрис нашего равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* ($\angle C$=90°) (*I* – центр вписанной окружности треугольника). Тогда треугольники *ACI* и *BCI* равны по двум сторонам и углу между ними (*AC=BC, CI* – общая, $\angle ACI=\angle BCI$). Пусть точки *M* и *K* симметричны точке *C* относительно биссектрис *AI* и *BI* соответственно. Тогда треугольники *ACI* и *AMI* равны как симметричные относительно *AI* , а треугольники *BCI* и *BKI***

равны как симметричные относительно *BI*, т.е. все эти четыре треугольника равны между собой (выше доказано равенство треугольников *ACI* и *BCI*). Значит, если мы разрежем исходный треугольник на треугольники *ACI, BCI, AMI* и *BMI*, то первые три треугольника равны между собой, а четвёртый треугольник накрывается каждым из этих трёх, т.к. треугольник *BMI* является частью равного им треугольника *BKI*.)

3–5. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×3 можно гарантированно вырезать из доски 8×8 с 5 предварительно удалёнными клетками? **(<u>16 триминошек</u>. При диагональной раскраске в три цвета у нас будет 22 клетки первого цвета и по 21 клетке второго и третьего цвета. Если удалены изначально сразу 5 клеток второго цвета, то мы сможем вырезать максимум 21–5=16 триминошек, т.к. каждая триминошка содержит свою клетку второго цвета. При этом всегда можно гарантированно вырезать 16 триминошек. Для этого на поле 8×8 выделим 21 триминошку (например, методом пропеллера), из которых удалённые клетки могут испортить нам максимум 5 триминошек.)**

3–6. В треугольнике *ABC* $\angle A = 110°$, $\angle C = 50°$, *AH* – высота, *CL* — биссектриса. Биссектриса угла *LAH* пересекает *LH* в точке *M*. Найдите $\angle AMB$. **(<u>135°</u>. Заметим, что угол, внешний к $\angle BAC$=110°, равен 70°, что равно $\angle BAH$=110°–$\angle HAC$=110°–(90°–50°)=70°. Значит, *AB* – биссектриса внешнего угла для угла *HAC*, а *L* – точка пересечения этой внешней биссектрисы и биссектрисы внутреннего угла *ACH*, т.е. является центром вневписанной окружности треугольника *ACH*. Следовательно, *HL* – биссектриса $\angle AHB$, внешнего для угла *AHC*. Значит, *M* – точка пересечения биссектрис треугольника *ABH*, а $\angle AMB$=90°+$\angle AHB$/2=90°+90°/2=135°.)**



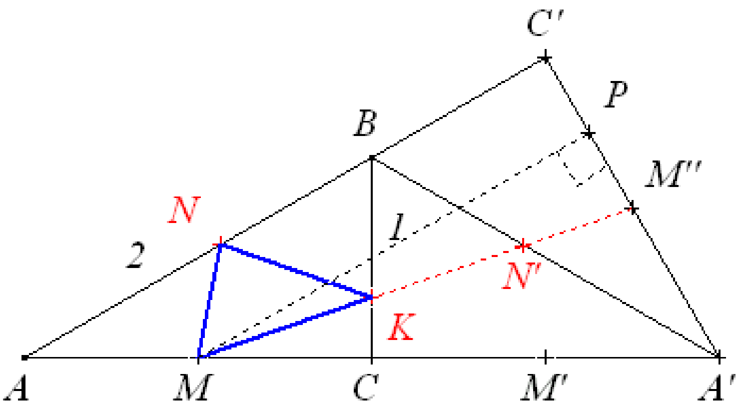
4–4. При каких $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ сумма $1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\ldots+2018^\alpha$ делится на 2019? **(<u>1 и 3</u>. Согласно формулам сумма первых *n* натуральных чисел, их квадратов, кубов и четвёртых степеней равна соответственно** $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$, $\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$**, из которых при *n*=2018 только первая и третья суммы разделятся на 2019=3·673.)**

4–5. В кучке лежат *N* камней. За 1 ход их количество удваивают, а затем убирают *k* камней (*k* – некоторое фиксированное натуральное число). Остаток камней снова удваивают и затем убирают *k* камней. После нескольких таких операций в кучке не осталось камней. При каком наибольшем *N* такое могло быть? **(<u>$(2^p–1)k/2^p$, где *p* – степень вхождения двойки в разложение на простые множители числа *k*</u>. Перед последней операцией в кучке было *k*/2 камней, перед этим в ней было**

(k/2+k)/2=3k/4 камней, перед этим было (3k/4+k)/2=7k/8 камней и т.д. Т.е. перед p-той с конца операцией в кучке было $(2^p–1)k/2^p$ камней. Значит, такая операция возможна только при делимости числа k на соответствующую степень двойки, а тогда наибольшее число N равно $(2^p–1)k/2^p$, где p – степень вхождения двойки в разложение на простые множители числа k.)

4–6. Действительные числа x и y таковы, что $x-2\sqrt{x+2}=2\sqrt{y+3}-y$. Найдите наибольшее возможное значение суммы x+y. **($\underline{4+2\sqrt{14}}$. Уравнение равносильно уравнению $x+y=2\sqrt{x+2}+2\sqrt{y+3}$, где правая часть согласно неравенству Коши-Буняковского не превышает $\sqrt{2^2+2^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{x+2})^2+(\sqrt{y+3})^2}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{x+y+5}$. Возводим в квадрат обе части неравенства $x+y\le 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{x+y+5}$, считая x+y>0 (для поиска максимума), и решаем квадратное неравенство относительно (x+y). Тогда $x+y\le 4+2\sqrt{14}$, причём равенство достигается при x+2=y+3, т.е. $x=2{,}5+\sqrt{14}$, $y=1{,}5+\sqrt{14}$, которые удовлетворяют исходному уравнению.)**

5–5. M – середина катета AC, а точки N и K отмечены на гипотенузе AB=2 и катете BC=1. Какой наименьший периметр может иметь треугольник MNK? **($\frac{\sqrt{21}}{2}$. Заметим, что из условия следует, что наш прямоугольный треугольник ABC имеет углы ∠A=30° и ∠B=60°. Отразим треугольник сначала относительно прямой BC, затем треугольник $BCA’$ относительно прямой $BA’$. Тогда периметр**



треугольника MNK выложится в виде ломаной $MKN’M”$ (см. чертёж), кратчайшая длина которой будет равна длине отрезка $MM”$, если точки K и $N’$ попадут на него. Значит, нам надо найти расстояние между точками M и $M”$, которое можно найти по теореме косинусов из треугольника $MM”A’$, где ∠$MA’M”$=60°, $A’M”=AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A’M=3\cdot AM=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$MM''=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Также этот отрезок можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника $MM”P$, где P – середина отрезка $M”C’$, $MP=\frac{3}{4}AC'=\frac{9}{4}$, $M''P=\frac{\sqrt{3}}{4}$, что следует из теоремы Фалеса.)

5–6. Сколько существует треугольников с целочисленными сторонами и периметром 2018, в которых одна из биссектрис делит противоположную сторону на целочисленные отрезки? **(<u>504</u> равнобедренных треугольника со сторонами (2k, 1009–k,**

1009–*k*), где *k* – натуральное число в пределах от 1 до 504. Пусть стороны этого треугольника *a, b, c*=*p*+*t*, *a*+*b*+*c*=2018, где все введённые переменные являются натуральными числами, тогда по свойству биссектрисы после применения свойства ряда равных отношений $\frac{a}{p}=\frac{b}{t}=\frac{a+b}{p+t}=\frac{a+b}{c}$ **– рациональное число, которое равно несократимой дроби** $\frac{n}{k}$**, причём *p, t* и *c* делятся на *k*, значит, *c*=*p*+*t*≥2*k*, но кроме того, *c*<2018/2=1009 по неравенству треугольника. Тогда** $2018=a+b+c=\frac{n}{k}\cdot c+c=\frac{(n+k)c}{k}$ **⇔ 2018*k*=2·1009·*k*=(*n*+*k*)*c*, где 2, 1009 – простые числа, (*n*+*k*) и *k* – взаимно просты, 2*k*≤*c*<1009. Значит, *c*=2*k, n*+*k*=2009, тогда *p*=*t*=*k*, т.е. треугольник – равнобедренный с чётным по длине основанием от 2 до 1008, а таких треугольников ровно 1008:2=504.)**

6–6. Пусть *R*(*n*) – это разность шестизначного числа *n* и числа, образованного его первыми тремя цифрами (например, *R*(567432)=567432–567=566865). У скольких шестизначных чисел *R*(*n*) будет кратно 9? **(<u>100800</u>. Рассмотрим последовательность по возрастанию номеров, где *R*(*n*) – число, получаемое из *n* с помощью описанной разности. Будем называть шестизначные числа *числами одной тысячи*, если первые три цифры у них совпадают, т.е. первая тысяча чисел – это числа от 100000 до 100999, а последняя тысяча – это числа от 999000 до 999999. Тогда *R*(*n*+1)=*R*(*n*)+1, если *n* и *n*+1 – числа одной тысячи, т.к. при вычитании из соседних чисел одной тысячи трёхзначного числа (одинакового), образованного первыми тремя цифрами, мы опять получим соседние числа. Если же *n* и *n*+1 – соседние числа из разных тысяч, то из *n* мы вычтем некоторое трёхзначное число *k*, а из *n*+1 мы вычтем уже *k*+1. Значит, *R*(*n*+1)=*R*(*n*), если *n* оканчивается на 999. Таким образом, последовательность {*R*(*n*)} возрастает с шагом 1 и только при переходе к следующей тысяче сохраняет своё значение ровно на одно следующее число. Тогда в нашей последовательности будут все натуральные числа от *R*(100000)=99900 до *R*(999999)=999000, при этом по два раза будут встречаться числа** $R(\overline{abc999})=R(\overline{abc999}+1)=\overline{abc999}-\overline{abc}=\overline{abc(9-a)(9-b)(9-c)}$**, которые кратны 9 и идут через 999, т.е. кратны 999, т.к. начальное число 99900 также кратно 999. Значит, числа кратные 9 встретятся (999000–99900):9+1=99901 раз, причём все кратные 999, кроме 99900 и 999000, встретятся по два раза, а таких чисел (999000–99900):999–1 = 899. Тогда в нашей последовательности встретится 99901+899=100800 чисел, кратных 9.)**