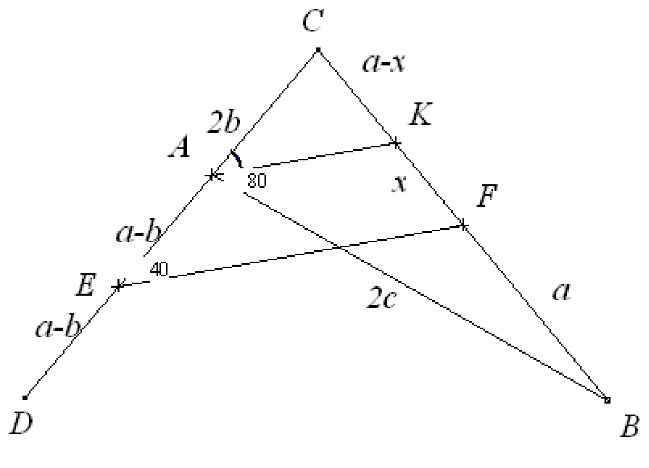
XIV Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». XI Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль».

Младшая лига. **Решения**. ***10 сентября 2018 года***

1. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых xy^2+7 делится на x^2y+x. **(<u>(1; 1), (1; 3), (1; 7), (7; 7)</u>. xy^2+7 делится на $x^2y+x=x(xy+1)$, значит, делится и на x, тогда в силу делимости на x первого слагаемого на x будет делиться и 7, т.е. x равен либо 1, либо 7. <u>*1 случай*</u>. $x=1$. Тогда y^2+7 делится на $y+1=n\geq2$, $y^2+7=(n-1)^2+7=n^2-2n+8$, где два первых слагаемых делятся на n, значит, $n\geq2$ – делитель 8, т.е. равен либо 2, либо 4, либо 8, откуда найдём $y\in\{1; 3; 7\}$. <u>*2 случай*</u>. $x=7$. Тогда $7y^2+7$ делится на $49y+7=7(7y+1)$, т.е. y^2+1 делится на $7y+1$. Но $7y+1=n$ взаимно просто с 7, значит, $7^2(y^2+1)=49y^2+49=(n-1)^2+49=n^2-2n+50$ делится на $7y+1=n\geq8$, откуда $n\geq8$ и $n\equiv1 \pmod 7$ – делитель числа 50, Из его делителей 50, 25, 10, 5, 2 и 1 нам подходит только $50\equiv1 \pmod 7$. Тогда $y=(50-1):7=7$. <u>*Комментарий:*</u> *Для удобства выделения делящихся слагаемых лучше пользоваться заменой типа $y+1=n$.*)**

2. На бумажной полоске написаны по порядку целые числа от 1 до 2019. Полоску разрезали на несколько частей (не менее трёх). Каждая из частей содержит нечётное количество чисел. Затем на каждой части отметили среднее число. Оказалось, что на первой части отмечено число k, на второй части — число $2k$, третьей — $3k$ и т.д. При каких k это возможно? **(<u>$k\in\{1, 2, 5, 10, 101, 202, 505\}$</u>. Нетрудно показать, что первая часть содержит числа 1, 2, …, $2k-1$; вторая часть – $2k$; третья часть – $(2k+1), \dots, 4k-1$; четвёртая – $4k$; и т.д. Каждая нечётная по номеру часть содержит $2k-1$ число, а каждая чётная по номеру часть одно число, вместе же две такие части содержат $2k$ чисел, поэтому будем считать, что у нас 2020 чисел, добавив ещё число 2020. Тогда количество «всех» 2020-ти чисел должно делиться на $2k$, значит, k – натуральный делитель числа $1010=2\cdot5\cdot101$ и принадлежит множеству {1, 2, 5, 10, 101, 202, 505, 1010}, но при $k=1010$ у нас будет ровно 1 часть, что не удовлетворяет условию.)**

3. Дан треугольник ABC, в котором $CB > CA$ и $\angle A=80°$. Точка D расположена на луче CA таким образом, что $CD = CB$. Точки E и F – середины отрезков AD и BC соответственно, причём $\angle CEF=40°$. Какие значения может принимать $\angle ABC$? **(<u>20°</u>. Пусть AK – биссектриса $\angle BAC$ (K лежит на стороне BC), значит, $\angle CAK=\angle CEF=40°$, т.е. $AK||EF$. Введём длины отрезков так, как показано на рисунке ($BC=CD=2a$, $AC=2b$, $KF=x$, $AB=2c$), тогда $AE=ED=(2a-2b)/2=a-b$. По свойству биссектрисы и по теореме о пропорциональных отрезках получаем, что**

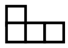
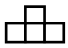
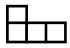


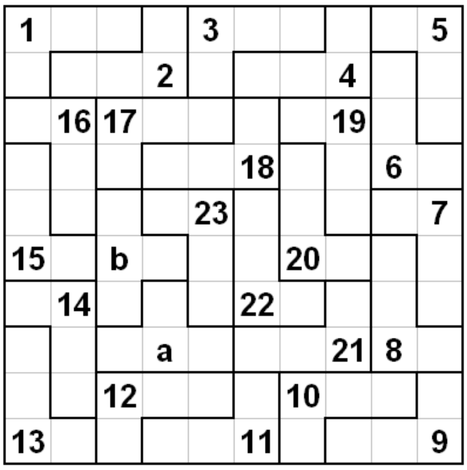
$$\frac{2c}{a+x}=\frac{2b}{a-x}=\frac{2b+(a-b)}{a}=\frac{a+b}{a},$$ **но по свойству ряда равных отношений** $$\frac{2c}{a+x}=\frac{2b}{a-x}=\frac{2c+2b}{(a+x)+(a-x)}=\frac{2c+2b}{2a}=\frac{c+b}{a},$$ **значит,** $$\frac{a+b}{a}=\frac{c+b}{a},$$ **откуда, $a=c$, т.е. $AB=2c=2a=BC$, т.е. треугольник ABC – равнобедренный, тогда $\angle B=180°-2\angle A=180°-2\cdot80°=20°$.)**

4. Натуральное число A назовём *n–сложным*, если существует такое натуральное k, что A можно представить в виде суммы любого количества последовательных натуральных чисел от $k+1$ до $k+n$. Например, 9 является *2-сложным*, т.к. 9=4+5=2+3+4 и $k=1$. Найдите наибольшее возможное n, для которого существует *n–сложное* число. Укажите также все возможные k, соответствующие такому n. **(<u>3, причём k – любое чётное натуральное число</u>. Предположим, что для некоторого A будет $n\geq4$, тогда существует такое натуральное k, что A можно представить в виде суммы любого количества последовательных натуральных чисел от $k+1$ до $k+4$. Но два из этих чисел будут чётными, отличающимися ровно на 2, например, $2p$ и $2p+2$. Тогда сумма $2p$ подряд идущих натуральных чисел разобьётся на p пар с одинаковой нечётной суммой**

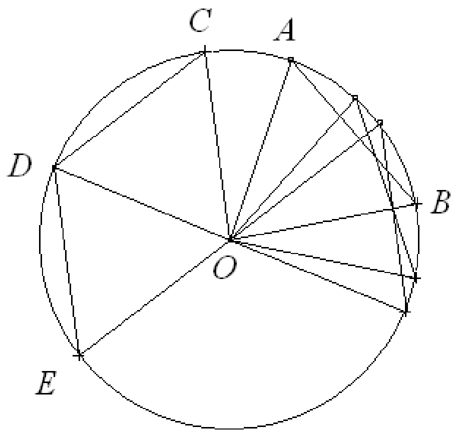
(сумма двух средних чисел), а сумма $2p+2$ подряд идущих натуральных чисел разобьётся на $p+1$ пару с одинаковой нечётной суммой (сумма двух средних чисел), т.е. эти две суммы будут разной чётности, значит, не могут быть равны одному и тому же числу A. Таким образом, $n\le 3$. При этом для $n=3$ среди чисел $k+1$, $k+2$ и $k+3$ будет ровно одно чётное ($k+2$) согласно вышеприведённым рассуждениям, значит, k – чётно. Причём для любого чётного $k=2p$ существует *3-сложное* число $A=(p+1)(2p+1)(2p+3)$. Действительно, A будет суммой $k+1=2p+1$ подряд идущих натуральных чисел, среднее из которых равно $(p+1)(2p+3)$, будет суммой $k+2=2p+2$ подряд идущих натуральных чисел, два средних из которых в сумме равны нечётному числу $(2p+1)(2p+3)$, будет суммой $k+3=2p+3$ подряд идущих натуральных чисел, среднее из которых равно $(p+1)(2p+1)$.)

5. Сколько существует четырёхзначных нечётных чисел, в которых есть хотя бы одна тройка? **($5\cdot 9\cdot 10\cdot 10-4\cdot 8\cdot 9\cdot 9=$<u>1908</u>. Из всех четырёхзначных нечётных чисел, которых по правилу произведения в комбинаторике будет $5\cdot 9\cdot 10\cdot 10=4500$ (последняя цифра – нечётная (5 вариантов), первая – любая ненулевая (9 вариантов), остальные две цифры – по 10 вариантов), уберём те, в которых нет тройки, а таких чисел $4\cdot 8\cdot 9\cdot 9=2592$ (последняя цифра – нечётная, не равная 3 (4 варианта), первая – любая ненулевая, не равная 3 (8 вариантов), остальные две цифры – по 9 вариантов). Тогда останутся только четырёхзначные нечётные числа, в которых есть хотя бы одна тройка, и их количество равно $4500-2592=1908$.)**

6. Клетчатая доска 10×10 замощена фигурками вида  и  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Какое наибольшее количество фигурок  могло быть использовано? **(<u>23</u>, см. рисунок, где фигурки «Г» пронумерованы числами от 1 до 23, а фигурки «Т» – буквами *a* и *b*. Применим полосатую раскраску, чередуя белые и чёрные вертикальные ряды. Тогда каждая фигурка «Г» содержит 1 или 3 (нечётное количество) чёрных клетки из 50 возможных, значит, все 100:4=25 фигурок не могут быть такими, т.к. тогда бы они содержали в сумме нечётное количество чёрных клеток вместо 50. Значит, есть фигурки «Т». Применим шахматную раскраску. При ней будет 50 (чётное количество) чёрных клеток, каждая фигурка «Г» содержит 2 (чётное количество) чёрных клетки, каждая фигурка «Т» – 1 или 3 (нечётное количество) чёрных клеток, значит, фигурок «Т» должно быть чётное количество. Таким образом, фигурки «Т» есть и их хотя бы 2, значит, фигурок «Г» максимум 25–2=23.)**



7. Имеется палочка единичной длины. От палочки отламывается кусок длины r, а оставшаяся часть разламывается на три кусочка, длины которых не больше r. Оказалось, что ни из каких трёх из четырёх получившихся кусков нельзя сложить треугольник. При каком наименьшем r такое возможно? *Приведите ответ и пример.* **(<u>$r=3/7$ при наборе 1/7, 1/7, 2/7, 3/7</u> . Предположим, что $r<3/7$. Упорядочим наши 4 отрезка $a\le b\le c\le r$, их сумма равна 1. Тогда в силу отсутствия треугольников получим, что $a+c\le r<3/7$, $a+b\le c$. Значит, $4/7<1-r=a+b+c\le 2c$, тогда $c>2/7$, $b>4/7-(a+c)>4/7-3/7=1/7$, следовательно, $b+c>1/7+2/7=3/7>r$ – получаем треугольник со сторонами b, c, r – противоречие. Значит, $r\ge 3/7$.)**

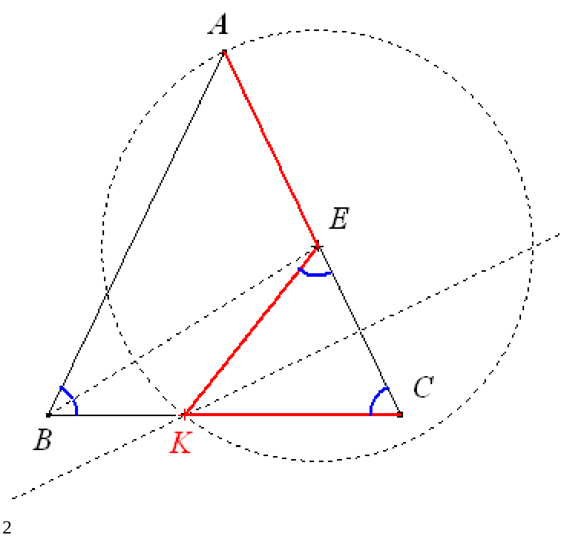


8. При каких $n\ge 3$ на плоскости можно отметить n точек таким образом, что для любых двух отмеченных точек найдётся ещё одна отмеченная точка, равноудаленная от них? *Приведите ответ и пример.* **(<u>При всех $n\ge 3$</u>. Отметим одну точку O как центр окружности, а остальные $(n-1)$ точку разместим на этой окружности так, чтобы они разбивались на пары (типа A и B – см. рис.), дающие равносторонний треугольник ABO при нечётном n, а при чётном n, кроме пар, создадим 1 ромб типа $OCDE$ из**

двух равносторонних треугольников.)

9. В каждом из 120 мешков лежит по 100 монет: в одном мешке фальшивые, весом по 9 г, а в остальных — настоящие, весом по 10 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 100 монет. Какого наименьшего количества взвешиваний заведомо хватит, чтобы определить мешок с фальшивыми монетами? **(<u>Три взвешивания</u>. *<u>Доказательство оценки</u>:* После первого взвешивания на весах не смогут побывать монеты хотя бы из 120–100=20 мешков, при этом фальшивые монеты могли оказаться в одном из этих мешков. На втором взвешивании, чтобы распознать мешок с фальшивыми монетами, нам надо брать разное количество монет из этих не менее 20 мешков. Тогда на весы пришлось бы положить не менее 0+1+2+…+19=20·19/2=190 монет, что невозможно. Значит, двух взвешиваний для гарантированного определения мешка с фальшивыми монетами не хватит. *<u>Пример на 3 взвешивания</u>:* Первым взвешиванием положим по одной монете из 60 некоторых мешков. Тогда либо у нас будет вес в 60·10=600 г, значит, фальшивый мешок среди 60 остальных; либо у нас будет вес в 600–1=599 г, значит, один из этих мешков будет фальшивым. За два взвешивания с 60 мешками, среди которых находится фальшивый мешок, найдём его. Пронумеруем эти 60 мешков числами от 1 до 60. Возьмём сначала по 0 монет из 1–14 мешков, по 1 монете – из 15–28 мешков, по 2 монеты – из 29–42 мешков, по 3 монеты – из 43–56 мешков и по 4 монеты – из 57–60 мешков. Тогда мы взяли (0+1+2+3)·14+4·4=100 монет. Если суммарный вес монет равен 100·10=1000 г, то у нас нет фальшивых монет на весах, значит, они лежат в 1–14 мешках; если нам не хватает 1 г до 1000 г, то фальшивые монеты лежат в 15-28 мешках; если нам не хватает 2 г до 1000 г, то фальшивые монеты лежат в 29-42 мешках; если нам не хватает 3 г до 1000 г, то фальшивые монеты лежат в 43-56 мешках; если нам не хватает 4 г до 1000 г, то фальшивые монеты лежат в 57-60 мешках. Зная теперь набор из 14 мешков (или 4 мешков), где лежат фальшивые монеты, пронумеруем эти мешки заново числами от 1 до 14 (от 1 до 4) и возьмём из них во второе взвешивание соответственно 1, 2, …, 13 и 0 монет (или соответственно 1, 2, 3 и 4). Всего мы возьмём либо 1+2+3+…+13+0=91 монету, либо 1+2+3+4=10 монет, а в зависимости от нехватки нам от 0 до 13 граммов до 91·10=910 г в первом случае и от 1 до 4 граммов до 10·10=100 г во втором случае мы определим мешок, в котором находятся фальшивые монеты.)**

10. На острове Лжецов и Рыцарей круг называют *дружественным*, если каждый, стоящий в кругу, может сказать, что среди его соседей есть представитель его племени. Однажды $N \geq 10$ аборигенов образовали дружественный круг. К ним подошёл рыцарь и сказал: «Теперь мы вместе тоже можем образовать дружественный круг». После чего подошёл лжец и повторил ту же фразу. При каких N такое могло быть? **(<u>$N \geq 10$ кратно 3</u>. Круг *дружественен* тогда и только тогда, когда рядом с каждым рыцарем есть хотя бы один рыцарь, а оба соседа каждого лжеца – рыцари, т.е. лжецы стоят поодиночке, а рыцари идут цепочками не короче двух. Рыцарь в такой круг с сохранением его дружественности сможет встать всегда, а лжец не сможет встать (т.к. он лжёт) в него только тогда, когда все цепочки рыцарей состоят из двух человек, кроме возможно одной цепочки из ровно трёх рыцарей. Поэтому после того, как подошёл рыцарь, рыцарей должно было стать $2k+1$ при k лжецах. Значит, изначально было $N=3k$ аборигенов.)**



11. В равнобедренном треугольнике $(AB=AC)$ с $\angle A=\alpha$ проведена биссектриса BE. Оказалось, что на основании BC есть внутренняя точка K такая, что $AE=EK=KC$. Найдите α. **(<u>$36° < \alpha < 180°$</u>. Заметим, что это верный факт (точки A, E, K, B окажутся на одной окружности) для любого равнобедренного треугольника при условии, что K попадает внутрь BC, но тогда $\angle CKE = \alpha > \angle CBE = (180° - \alpha)/4$. Из этого неравенства и получаем ответ.)**

12. Найдите наибольшее λ, для которого неравенство $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} \geq \lambda(x-z)$ выполняется при всех положительных x, y и z. **(<u>4</u>. Заметим, что при положительных x и y выполняется неравенство**

$\frac{x^2}{y} \ge 4(x-y)$**, которое равносильно верному неравенству $(x-2y)^2\ge 0$. Аналогично доказывается неравенство** $\frac{y^2}{z} \ge 4(y-z)$**. Сумма этих двух неравенств даст нам нужное неравенство при $\lambda=4$. Если же мы возьмём $\lambda>4$, то при $x=4$, $y=2$, $z=1$ получаем** $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}=\frac{4^2}{2}+\frac{2^2}{1}=12<3\lambda=\lambda(x-z)$**, т.е. нужное нам неравенство не выполняется.)**

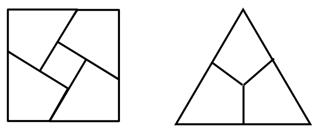
13. На доске написано натуральное число $N\le 1000000$. За одну операцию число на доске можно изменить следующим образом: либо умножить на простое число, либо разделить на квадрат натурального числа (если делится нацело). Пусть $m(N)$ – наименьшее количество операций, с помощью которых из числа N можно получить 1. Чему равно наибольшее возможное $m(N)$? **(<u>8</u>, у 8 чисел – $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot n$, где $n\in\{17, 19\ 23, 29, 31\}$, $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot17\cdot19$, $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot17\cdot23$, $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot17\cdot19$. Мы должны избавиться от всех простых множителей за счёт операций деления на точный квадрат, при этом степень каждого из простых множителей при операции деления сохраняет чётность, значит, каждый из простых множителей должен в некоторый момент оказаться в чётной степени, которую потом уже можно превратить в нулевую у всех за счёт одной операции деления. Значит, для каждого из простых множителей, изначально находящихся в нечётных степенях, хотя бы по разу была выполнена операция умножения на соответствующее число. Тогда наибольшее $m(N)$ будет у числа из первого миллиона с наибольшим количеством различных простых множителей, превышая это количество на 1 за счёт операции деления на сам квадрат. Тогда перемножая самые маленькие простые числа, получим, что $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17<1000000<2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19$. Значит, наибольшее $m(N)=7+1=8$.)**

14. Найдите какое-нибудь натуральное число n, что для любого десятизначного числа k сумма цифр числа kn равна сумме цифр числа n. **(<u>n=9999999999=10^{10}–1</u>. Пусть** $k=\overline{a_1a_2...a_p0...0}$**, где a_p – последняя ненулевая цифра, $1\le p\le 10$. Тогда**

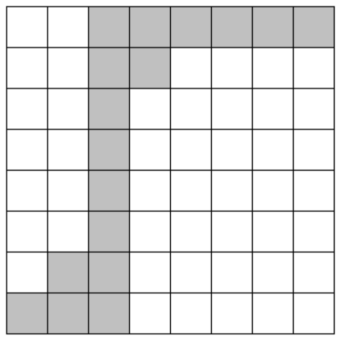
$$kn=(10^{10}-1)k=\overline{a_1a_2...a_p\underbrace{0\ ...\ 0}_{10-p\text{ нулей}}}\cdot 10^{10}-\overline{a_1a_2...a_p\underbrace{0\ ...\ 0}_{10-p\text{ нулей}}}=$$

$$=\overline{a_1a_2...(a_p-1)\underbrace{9\ ...\ 9}_{10-p\text{ девяток}}(9-a_1)(9-a_2)...(10-a_p)\underbrace{0\ ...\ 0}_{10-p\text{ нулей}}}$$

, а сумма цифр числа kn равна $10\cdot9=90$, т.е. равна сумме цифр числа n=9999999999.)



15. Разрежьте равносторонний треугольник на три одинаковых части так, что из четырёх таких частей и ещё одного маленького квадратика можно сложить квадрат. *Приведите обе картинки.* **(Можно разрезать на три выпуклых четырёхугольника с углами 60°, 90°, 120° и 90° – см. рис. *<u>Комментарий:</u> метод «пропеллера» – кто бы сомневался, что он работает:☺*.)**



16. Отметьте 17 клеток шахматной доски так, чтобы не нашлось ни одного остроугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток. **(см. рис.)**