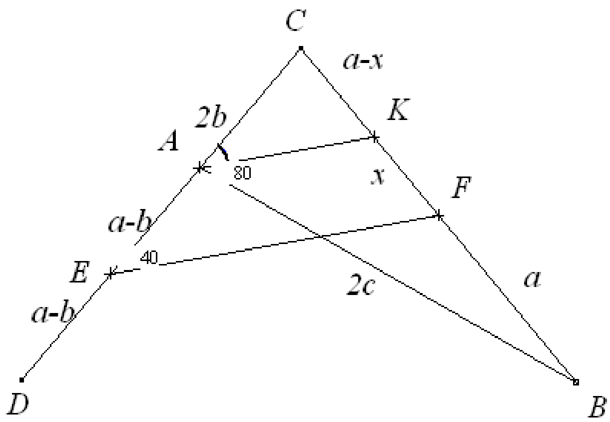
XIV Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». XI Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль».

<u>Старшая лига.</u>* <u>Решения</u>. *10 сентября 2018 года

1. Найдите количество десятизначных чисел, в записи которых все цифры не больше 2, и любые две соседние цифры отличаются не более чем на 1. **(<u>5741</u>. Пусть x_n – количество n-значных чисел, в записи которых все цифры не больше 2, и любые две соседние цифры отличаются не более, чем на 1. Докажем, что $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ при всех $n\geq 2$. Разобьём наши n+1-значные числа на два множества – оканчивающиеся на 11 и неоканчивающиеся на 11. Тогда в первом множестве будет ровно x_{n-1} чисел, т.к. к каждому из них можно дописать 11 в конце, а во втором множестве будет $2x_n$ чисел, т.к. каждое n-значное число продолжается ровно двумя способами. Если оно оканчивалось на 0, то дописываем в конце 0 или 1; если оно оканчивалось на 1, то дописываем в конце 0 или 2; если оно оканчивалось на 2, то дописываем в конце 1 или 2. Значит, $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ при всех $n>2$, что и требовалось доказать. Найдем теперь первый и второй член последовательности $\{x_n\}$, учитывая только натуральные числа, т.е. число 0 не рассматриваем. $x_1=2$ – это числа 1 и 2; $x_2=5$ – это числа 10, 11, 12, 21, 22. Далее воспользуемся полученной рекуррентной формулой и найдём следующие члены последовательности, вплоть до 10-го. $x_3=2\cdot5+2=12$, $x_4=2\cdot12+5=29$, $x_5=2\cdot29+12=70$, $x_6=2\cdot70+29=169$, $x_7=2\cdot169+70=408$, $x_8=2\cdot408+169=985$, $x_9=2\cdot985+408=2378$, $x_{10}=2\cdot2378+985=5741$.)**

2. На бумажной полоске написаны по порядку целые числа от 1 до 2019. Полоску разрезали на несколько частей (не менее трёх). Каждая из частей содержит нечётное количество чисел. Затем на каждой части отметили среднее число. Оказалось, что на первой части отмечено число k, на второй части — число $2k$, третьей — $3k$ и т.д. При каких k это возможно? **(<u>$k\in\{1, 2, 5, 10, 101, 202, 505\}$</u>. Нетрудно показать, что первая часть содержит числа 1, 2, …, $2k$–1; вторая часть – $2k$; третья часть – ($2k$+1), …, $4k$–1; четвёртая – $4k$; и т.д. Каждая нечётная по номеру часть содержит $2k$–1 число, а каждая чётная по номеру часть одно число, вместе же две такие части содержат $2k$ чисел, поэтому будем считать, что у нас 2020 чисел, добавив ещё число 2020. Тогда количество «всех» 2020-ти чисел должно делиться на $2k$, значит, k – натуральный делитель числа $1010=2\cdot5\cdot101$ и принадлежит множеству {1, 2, 5, 10, 101, 202, 505, 1010}, но при k=1010 у нас будет ровно 1 часть, что не удовлетворяет условию.)**

3. Дан треугольник ABC, в котором $CB > CA$ и $\angle A=80°$. Точка D расположена на луче CA таким образом, что $CD = CB$. Точки E и F – середины отрезков AD и BC соответственно, причём $\angle CEF=40°$. Какие значения может принимать $\angle ABC$? **(<u>20°</u>. Пусть AK – биссектриса $\angle BAC$ (K лежит на стороне BC), значит, $\angle CAK=\angle CEF=40°$, т.е. $AK\parallel EF$. Введём длины отрезков так, как показано на рисунке ($BC=CD=2a$, $AC=2b$, $KF=x$, $AB=2c$), тогда $AE=ED=(2a–2b)/2=a–b$. По свойству биссектрисы и по теореме о пропорциональных отрезках получаем, что**



$$\frac{2c}{a+x}=\frac{2b}{a-x}=\frac{2b+(a-b)}{a}=\frac{a+b}{a},$$

но по свойству ряда равных отношений

$$\frac{2c}{a+x}=\frac{2b}{a-x}=\frac{2c+2b}{(a+x)+(a-x)}=\frac{2c+2b}{2a}=\frac{c+b}{a},$$

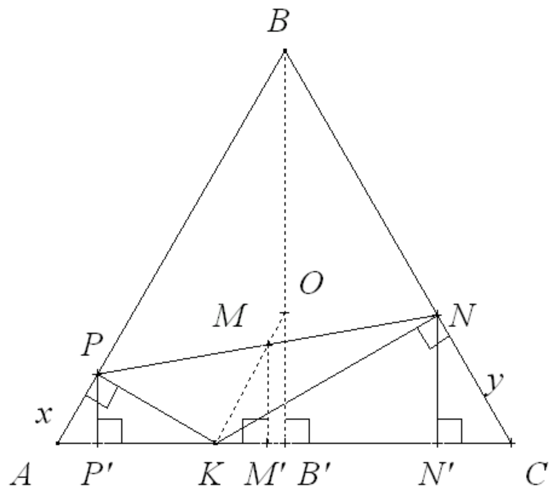
значит, $\frac{a+b}{a}=\frac{c+b}{a}$, **откуда, $a=c$, т.е. $AB=2c=2a=BC$, т.е. треугольник ABC – равнобедренный, тогда $\angle B=180°–2\angle A=180°–2\cdot80°=20°$.)**

4. Натуральное число A назовём *n–сложным*, если существует такое натуральное k, что A можно представить в виде суммы любого количества последовательных натуральных чисел от k+1 до k+n. Например, 9 является *2-сложным*, т.к. 9=4+5=2+3+4 и k=1. Найдите наибольшее возможное n, для которого существует *n–сложное* число. Укажите также все возможные k, соответствующие такому n. **(<u>3, причём k – любое чётное натуральное число</u>. Предположим, что для некоторого A будет $n\geq4$, тогда существует такое натуральное k, что A можно представить в виде суммы любого количества последовательных натуральных чисел от k+1 до k+4. Но два из этих чисел будут чётными, отличающимися ровно на 2, например, $2p$ и $2p$+2. Тогда сумма $2p$ подряд идущих натуральных чисел разобьётся на p пар с одинаковой нечётной суммой (сумма двух средних чисел), а сумма $2p$+2 подряд идущих натуральных чисел разобьётся на p+1 пару с одинаковой нечётной суммой (сумма двух средних чисел), т.е. эти две суммы будут разной чётности, значит, не могут быть равны одному и тому же числу A. Таким образом, $n\leq3$. При этом для n=3 среди чисел k+1, k+2 и k+3 будет ровно одно чётное (k+2) согласно вышеприведённым рассуждениям, значит, k – чётно. Причём для любого чётного $k=2p$ существует *3-сложное* число $A=(p+1)(2p+1)(2p+3)$. Действительно, A будет суммой $k+1=2p+1$ подряд идущих натуральных чисел,**

среднее из которых равно (p+1)(2p+3), будет суммой k+2=2p+2 подряд идущих натуральных чисел, два средних из которых в сумме равны нечётному числу (2p+1)(2p+3), будет суммой k+3=2p+3 подряд идущих натуральных чисел, среднее из которых равно (p+1)(2p+1).)

5. Найдите все такие функции f: R→R, что для любых действительных x и y выполняется равенство $(f(x)-f(y))^2=(x-y)^2$. (**<u>Все функции вида $f(x)=C\pm x$, где C – любое действительное число</u>. Пусть $f(0)=C$, тогда $|f(x)-C|=|x|$, откуда $f(x)=C\pm x$ для каждого x. Пусть найдутся одновременно ненулевые x и y, у которых разные знаки перед переменной, т.е. $f(x)=C+x$, $f(y)=C-y$, тогда $(f(x)-f(y))^2=(x-y)^2$ ⇔ $(x+y)^2=(x-y)^2$ ⇔ $xy=0$, что невозможно. Тогда для всех переменных знак плюс или минус будет всегда одинаков.)**

6. На стороне AC правильного треугольника ABC взята точка K, проекциями которой на стороны AB и BC будут точки P и N соответственно. Пусть M – середина отрезка PN, O – центр треугольника ABC. Какие значения может принимать отношение KM:MO? (**<u>3:1</u>. Будем считать с точностью до симметрии, что точка K ближе к A чем к C. Пусть $AP=x$, $CN=y$, ($x<y$), тогда $AK=2x$, $CK=2y$ – гипотенузы в треугольниках APK и CNK. Значит, сторона правильного треугольника ABC равна $2x+2y$, высота** $BB'=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}(x+y)$, **а отрезок OB' составляет треть этой высоты в силу свойств точки пересечения медиан треугольника, т.к. точка O является таковой в треугольнике ABC. Тогда в прямоугольном треугольнике KOB' отношение катетов равно** $\frac{KB'}{OB'}=\frac{KC-CB'}{\frac{\sqrt{3}(x+y)}{3}}=\frac{\sqrt{3}(2y-(x+y))}{x+y}=\frac{\sqrt{3}(y-x)}{x+y}$. **Пусть**

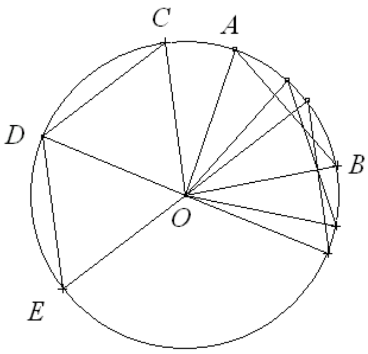


P', N' и M' – проекции точек P, N и M на сторону AC, тогда $P'N'=AC-AP'-N'C=2(x+y)-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=\frac{3}{2}(x+y)$, $P'M'=\frac{P'N'}{2}=\frac{3}{4}(x+y)$, $KM'=P'M'-P'K=\frac{3}{4}(x+y)-\frac{3}{2}x=\frac{3}{4}(y-x)$, **в трапеции $P'PNN'$ средняя линия** $MM'=\frac{PP'+NN'}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+y)$. **Значит, в прямоугольном треугольнике KMM' отношение катетов равно** $\frac{KM'}{MM'}=\frac{\frac{3}{4}(y-x)}{\frac{\sqrt{3}}{4}(x+y)}=\frac{\sqrt{3}(y-x)}{x+y}=\frac{KB'}{OB'}$. **Получаем, что треугольники KMM' и KOB' подобны, значит, лучи KM и KO совпадают, точка M лежит на отрезке KO и** $\frac{KM}{KO}=\frac{KM'}{KB'}=\frac{\frac{3}{4}(y-x)}{y-x}=\frac{3}{4}$, **тогда** $\frac{KM}{MO}=\frac{3}{1}$. **Случай совпадения точек K и B' даёт нужное нам отношение из отношения отрезков MM' и OB'.)**

7. Для каких натуральных $n>1$ неравенство $x_1^2+\ldots+x_n^2\ge(x_1+\ldots+x_{n-1})x_n$ выполняется при всех действительных x_1, ..., x_n? (**<u>2≤n≤5</u>. При n≤5 можно перенести всё налево, раскрыть скобки и выделить (n–1) квадрат разности, т.е. получим равносильное неравенство** $(x_1-\frac{x_n}{2})^2+\ldots+(x_{n-1}-\frac{x_n}{2})^2+\frac{(5-n)x_n^2}{4}\ge 0$. **При n≥6 приведём контрпример** $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=1,\ x_n=2$, **тогда будет выполняться неравенство** $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=(n-1)+4=n+3<2(n-1)=(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})x_n$, **которое будет равносильно верному неравенству n>5.)**

8. При каких n≥3 на плоскости можно отметить n точек таким образом, что для любых двух отмеченных точек найдётся ещё одна отмеченная точка, равноудаленная от них? Приведите ответ и пример. (**<u>При всех n≥3</u>. Отметим одну точку O как центр окружности, а остальные (n–1) точку разместим на этой окруж-**

ности так, чтобы они разбивались на пары (типа *A* и *B* – см. рис.), дающие равносторонний треугольник *ABO* при нечётном *n*, а при чётном *n*, кроме пар, создадим 1 ромб типа *OCDE* из двух равносторонних треугольников.)



9. В каждом из 120 мешков лежит по 100 монет: в одном мешке фальшивые, весом по 9 г, а в остальных — настоящие, весом по 10 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 100 монет. Какого наименьшего количества взвешиваний заведомо хватит, чтобы определить мешок с фальшивыми монетами? **(<u>Три взвешивания</u>. <u>*Доказательство оценки:*</u> После первого взвешивания на весах не смогут побывать монеты хотя бы из 120–100=20 мешков, при этом фальшивые монеты могли оказаться в одном из этих мешков. На втором взвешивании, чтобы распознать мешок с фальшивыми монетами, нам надо брать разное количество монет из этих не менее 20 мешков. Тогда на весы пришлось бы положить не менее 0+1+2+…+19=20·19/2=190 монет, что невозможно. Значит, двух взвешиваний для гарантированного определения мешка с фальшивыми монетами не хватит. <u>*Пример на 3 взвешивания:*</u> Первым взвешиванием положим по одной монете из 60 некоторых мешков. Тогда либо у нас будет вес в 60·10=600 г, значит, фальшивый мешок среди 60 остальных; либо у нас будет вес в 600–1=599 г, значит, один из этих мешков будет фальшивым. За два взвешивания с 60 мешками, среди которых находится фальшивый мешок, найдём его. Пронумеруем эти 60 мешков числами от 1 до 60. Возьмём сначала по 0 монет из 1–14 мешков, по 1 монете – из 15–28 мешков, по 2 монеты – из 29–42 мешков, по 3 монеты – из 43–56 мешков и по 4 монеты – из 57–60 мешков. Тогда мы взяли (0+1+2+3)·14+4·4=100 монет. Если суммарный вес монет равен 100·10=1000 г, то у нас нет фальшивых монет на весах, значит, они лежат в 1–14 мешках; если нам не хватает 1 г до 1000 г, то фальшивые монеты лежат в 15-28 мешках; если нам не хватает 2 г до 1000 г, то фальшивые монеты лежат в 29-42 мешках; если нам не хватает 3 г до 1000 г, то фальшивые монеты лежат в 43-56 мешках; если нам не хватает 4 г до 1000 г, то фальшивые монеты лежат в 57-60 мешках. Зная теперь набор из 14 мешков (или 4 мешков), где лежат фальшивые монеты, пронумеруем эти мешки заново числами от 1 до 14 (от 1 до 4) и возьмём из них во второе взвешивание соответственно 1, 2, …, 13 и 0 монет (или соответственно 1, 2, 3 и 4). Всего мы возьмём либо 1+2+3+…+13+0=91 монету, либо 1+2+3+4=10 монет, а в зависимости от нехватки нам от 0 до 13 граммов до 91·10=910 г в первом случае и от 1 до 4 граммов до 10·10=100 г во втором случае мы определим мешок, в котором находятся фальшивые монеты.)**

10. На острове Лжецов и Рыцарей круг называют *дружественным*, если каждый, стоящий в кругу, может сказать, что среди его соседей есть представитель его племени. Однажды $N \geq 10$ аборигенов образовали дружественный круг. К ним подошёл рыцарь и сказал: «Теперь мы вместе тоже можем образовать дружественный круг». После чего подошёл лжец и повторил ту же фразу. При каких N такое могло быть? **(<u>*N*≥10 кратно 3</u>. Круг *дружественен* тогда и только тогда, когда рядом с каждым рыцарем есть хотя бы один рыцарь, а оба соседа каждого лжеца – рыцари, т.е. лжецы стоят поодиночке, а рыцари идут цепочками не короче двух. Рыцарь в такой круг с сохранением его дружественности сможет встать всегда, а лжец не сможет встать (т.к. он лжёт) в него только тогда, когда все цепочки рыцарей состоят из двух человек, кроме возможно одной цепочки из ровно трёх рыцарей. Поэтому после того, как подошёл рыцарь, рыцарей должно было стать $2k+1$ при k лжецах. Значит, изначально было $N=3k$ аборигенов.)**

11. У натурального числа n ровно 2018 натуральных делителей (считая 1 и n). Для каждого делителя d числа n нашли неполное частное и остаток от деления $4n–3$ на d. Пусть Q — сумма всех полученных неполных частных, а R — сумма всех полученных остатков. Чему может быть равно число $Q–4R$? **(<u>22188 при нечётном *n* и 22179 при чётном *n*</u>. Упорядочим по возрастанию все делители $d_1=1<d_2<d_3<\ldots<d_{2018}$, при этом они разбиваются на пары симметричных от краёв с произведением n, т.е. $d_k \cdot d_{2019-k}=n$, где $1\leq k\leq 1009$. Пусть q_k и r_k – неполное частное и остаток от деления $4n–3$ на d_k. Тогда при $d_k=a\geq 3$ (где $1\leq k\leq 1009$) получим, что соответствующие паре симметричных делителей $d_k=a$ и $d_{2019-k}=n/a$ четыре числа, входящие в число $Q–4R$, дадут следующий вклад с учётом того, что очевидным образом $n\geq 120$:**

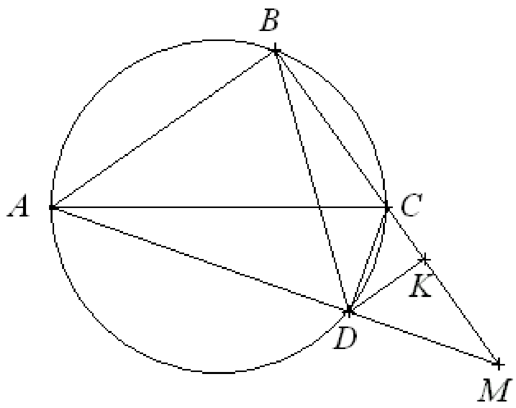
$$q_k + q_{2019-k} - 4(r_k + r_{2019-k}) = (4\cdot\frac{n}{a} - 1) + (4a - 1) - 4((a-3) + (\frac{n}{a} - 3)) = 22.$$

Кроме того, при k=1 имеем, что $q_1 + q_{2018} - 4(r_1 + r_{2018}) = (4n-3) + 3 - 4(0 + (n-3)) = 12$, **а при k=2 в случае чётного n имеем q_2=2, тогда соответственно:**

$$q_2 + q_{2017} - 4(r_2 + r_{2017}) = (2n-2) + 7 - 4(1 + (\frac{n}{2} - 3)) = 13.$$

Значит, при чётном n число $Q–4R$ = 12+13+1007·22 = 22179, т.к. из 1009 пар делителей ровно 1007 дадут вклад 22, а при нечётном n соответственно число $Q–4R$=12+1008·22=22188.)

12. На окружности по разные стороны от диаметра *AC* расположены точки *B* и *D*. Известно, что $AB=\sqrt{6}$, *CD*=1, а площадь треугольника *ABC* втрое больше площади треугольника *BCD*. Найдите радиус окружности. (<u>**3/2=1,5**</u>**. Пусть лучи *BC* и *AD* пересекаются в точке *M*, *DK* – высота треугольника *BCD*. Поскольку *ABC* = 90°, $S_{\Delta BCD}=S_{\Delta ABC}/3$, то** $DK=\dfrac{AB}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$**. Тогда**

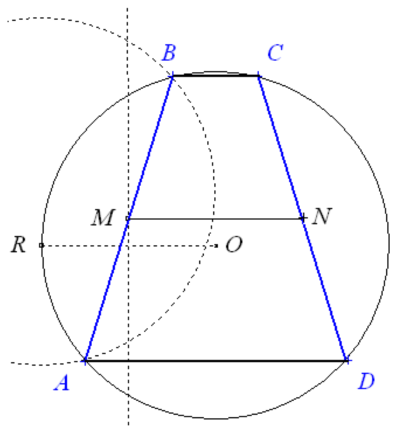


$\cos\angle KDC=\dfrac{DK}{CD}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

$AM=\dfrac{AB}{\sin\angle AMB}=\dfrac{AB}{\sin\angle KDC}=\dfrac{AB}{\sqrt{1-\cos^2\angle KDC}}=3\sqrt{2}$. **Поскольку *DK* || *AB*, то** $AD=\dfrac{2}{3}AM=2\sqrt{2}$**. Из прямоугольного треугольника *ADC* находим, что** $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=3$**. Следовательно, радиус окружности равен 1,5.)**

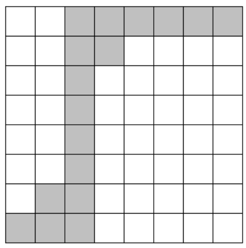
13. На доске написано натуральное число *N*. За одну операцию число на доске можно изменить следующим образом: либо умножить на простое число, либо разделить на квадрат натурального числа (если делится нацело). Пусть *m*(*N*) – наименьшее количество операций, с помощью которых из числа *N* можно получить 1. Сколько чисел в первом миллионе будут иметь наибольшее возможное *m*(*N*)? (<u>**8 чисел**</u> **– 2·3·5·7·11·13·*n*, где *n*∈{17, 19 23, 29, 31}, 2·3·5·7·11·17·19, 2·3·5·7·11·17·23, 2·3·5·7·13·17·19. Мы должны избавиться от всех простых множителей за счёт операций деления на точный квадрат, при этом степень каждого из простых множителей при операции деления сохраняет чётность, значит, каждый из простых множителей должен в некоторый момент оказаться в чётной степени, которую потом уже можно превратить в нулевую у всех за счёт одной операции деления. Значит, для каждого из простых множителей, изначально находящихся в нечётных степенях, хотя бы по разу была выполнена операция умножения на соответствующее число. Тогда наибольшее *m*(*N*) будет у числа из первого миллиона с наибольшим количеством различных простых множителей, превышая это количество на 1 за счёт операции деления на сам квадрат. Тогда перемножая самые маленькие простые числа, получим, что 2·3·5·7·11·13·17<1000000<2·3·5·7·11·13·17·19. Значит, наибольшее *m*(*N*)=7+1=8 . Далее перебором простых чисел найдём , что в первом миллионе 8 таких чисел, причём надо учесть, что простое число могло оказаться в нечётной степени, большей 1.)**

14. Какие значения может принимать угол при большем основании вписанной в окружность трапеции, средняя линия которой равна радиусу этой окружности? (<u>**30°<α<90° и α не равен 45°**</u>**. Будем строить нашу равнобедренную трапецию методом «идеального» построения (см. чертёж). Тогда точка *M* – середина боковой стороны *AB* трапеции *ABCD* – будет двигаться по прямой, являющейся серединным перпендикуляром к некоторому радиусу *OR*, параллельному стороне *AD*. Двигая точку *M* по этому серединному перпендикуляру в пределах окружности получим, что по непрерывности ∠*BAD*=α будет меняться в пределах от 30° (точка *A* совпадёт с *B* и прямая *AB* будет стремиться к касательной) до 150° (аналогичная ситуация на другом конце рассматриваемого отрезка). Но возникнут также особые случаи: 1) α=45°, когда точка *A* совпадёт с *R*, *B*=*C*, получится равнобедренный треугольник;**



2) α=135°, когда точка *B* совпадёт с *R*, *A*=*D*, также получится равнобедренный треугольник; 3) при попадании *M* на *OR* возникнет случай прямоугольника (α=90°), который по определению не является трапецией. С учётом того, что нам требуется угол при большем основании, получим ответ. ***<u>Комментарий</u>*: *см. аналогичную задачу №14 игры «Дуэль» со смен 2013 и 2016 годов. Её оба раза не решила ни одна команда. Интересно, как будет в этом году?*)**

15. Решите в действительных числах уравнение $(x+y+z)^2=2x^2+3y^2+6z^2$. (<u>***x*=3*z*, *y*=2*z*, *z* – любое действительное число**</u>**. Возведём сумму в квадрат, сократим подобные слагаемые и получим следующее равносильное уравнение** $2xy+2yz+2zx=x^2+2y^2+5z^2$**. Перенесём все слагаемые в одну часть и выделим три полных квадрата** $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x-\sqrt{\frac{3}{2}}y\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x-\sqrt{3}z\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y-\sqrt{2}z\right)^2$ **=0, откуда и получим ответ.)**



16. Отметьте 17 клеток шахматной доски так, чтобы не нашлось ни одного остроугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток. **(см. рис.)**