XIV Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». XI Турнир математических игр.

Математическая игра «Пенальти».

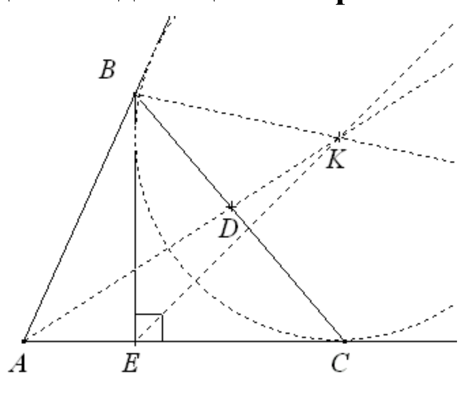
Младшая лига. **Решения. *11 сентября 2018 года***

1. В однокруговом турнире участвовали n шахматистов с различными рейтингами. Шахматист с самым низким рейтингом выиграл у шахматиста с самым большим рейтингом, а во всех остальных партиях всегда побеждал шахматист с более высоким рейтингом, Сколькими способами можно составить список шахматистов так, чтобы каждый (кроме последнего) выиграл у следующего по списку? (**$2^{n-2}+1$. Один из искомых списков — тот, где все шахматисты упорядочены по убыванию рейтинга. Во всех остальных списках шахматист с самым большим рейтингом идёт сразу после шахматиста с самым маленьким рейтингом, и всё полностью определяется тем, какие спортсмены стоят в ряду до этой пары, а какие – после. Наборов шахматистов, стоящих до этой пары, столько же, сколько подмножеств во множестве из n–2 элементов, то есть 2^{n-2}. Отсюда и получаем ответ.)**

2. Каждому натуральному числу n сопоставлено неотрицательное целое число n' по следующим правилам: (1) если p простое, то $p' = 1$, (2) $(ab)' = a'b+ab'$ для любых натуральных a и b. Найдите $(2018^{2018})'$. *Ответ дать в максимально упрощённом виде.* **($2018^{2018}\cdot 1011$. Нетрудно доказать по индукции, что для любого $n\geq 2$ число n' равно самому числу n, умноженному на сумму обратных величин ко всем простым множителям из разложения на простые множители с учётом их повторов, т.е.** $(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k})' = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\cdot(\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2}+\ldots+\frac{\alpha_k}{p_k})$ **при различных простых p_i. Тогда** $(2018^{2018})' = (2^{2018}\cdot 1009^{2018})' = 2018^{2018}\cdot(\frac{2018}{2}+\frac{2018}{1009}) = 2018^{2018}\cdot 1011$.**)**

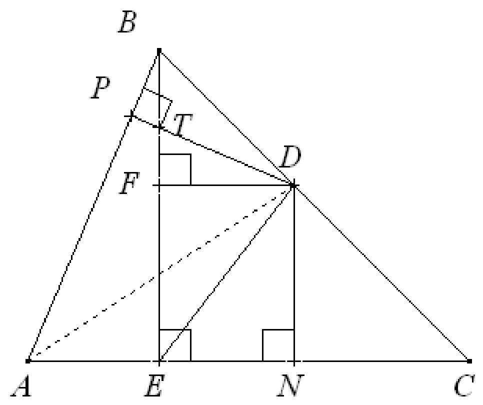
3. Сколько решений имеет ребус (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*): $\overline{ОРЛЁ}+\overline{НОК}=2018$ (**12 решений. *Ё*+*К*≤8+9=17 и оканчивается на 8, значит, *Ё*+*К* =8. $\overline{НОК}\geq 102$, значит, $\overline{О}=1$, тогда *Л*=0, *Р*+*Н*=10. Перебор случаев показывает, что при наборе {*Ё, К*}={2, 6} набор {*Р, Н*}={3, 7} – 2·2=4 вариантов, при {*Ё, К*}={3, 5} набор {*Р, Н*} равен {2, 8} или {4, 6} – 2·2·=8 вариантов, значит, всего у ребуса 4+8=12 решений.)**

4. Сколько существует 6-значных чисел, в которых есть только чётные цифры и они слева направо идут в неубывающем порядке? (*например, такими числами будут 222222, 446888, 244666*) ($\overline{C_4^6} = C_9^6 = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = 84$. **Из 4 видов чётных ненулевых цифр (0 использовать нельзя, т.к. 6-значное число не может начинаться с 0) мы можем взять любые 6 с повторениями, причём порядок выбора нам не важен, а по любому набору из 6 чётных цифр требуемое число строится однозначно, значит, количество нужных нам чисел равно числу сочетаний с повторениями из 4 по 6. Причём каждый такой выбор кодируется с помощью метода «шаров и перегородок» 6 единицами-шариками и 3 нулями-перегородками между 4 ящиками со своими видами цифр.)**



5. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и высота BE. Какие значения может принимать $\angle CED$? (**45°<$\angle CED$<90°. *Доказательство 1:* Рассмотрим центр K вневписанной окружности для треугольника ABE, касающейся стороны BE и продолжений сторон AB и AC (см. рис.). Точка K лежит на луче AD – биссектрисе $\angle BAC$, на биссектрисе $\angle BEC$ и биссектрисе BK угла, смежного с**

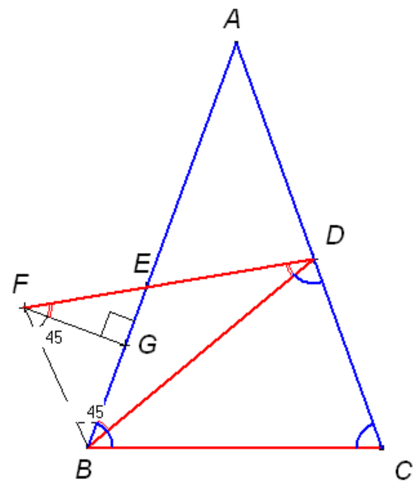
∠*ABE*, который сам является острым. Также острым будет ∠*CBE*, а смежный с острым ∠*ABC* будет тупым, значит, биссектриса *BK* пройдёт вне ∠*ABC*, и точка пересечения *К* с биссектрисой *AD* будет на продолжении отрезка *AD* за точкой *D*. Тогда ∠*CED*>∠*CEК*=45°. При движении точки *C* к *E* ∠*CED* будет непрерывно стремиться к 90°, а при движении точки *A* к *E* ∠*CED* будет непрерывно стремиться к 45°, при этом треугольник будет оставаться остроугольным. *<u>Комментарий:</u> Полезно знать, что такое вневписанная окружность, хотя её и не изучают по школьной программе. Она здесь напрашивается в силу двух проведённых биссектрис. Но есть и другое решение, когда воспользуемся свойством биссектрисы как множеством точек, равноудалённых от сторон угла. <u>Доказательство 2:</u>* Пусть *P, N* и *F* – проекции основания *D* биссектрисы *AD* на стороны угла *BAC* и высоту *BE, T* – точка пересечения отрезков *PD* и *BE* (точки расположены так, как показано на рисунке с учётом остроугольности треугольника *ABC*).



Тогда *DN*=*DP*>*DT*>*DF*=*NE*, значит, в прямоугольном треугольнике *DNE* – катет *DN* больше катета *NE*, следовательно, ∠*CED*=∠*NED*>45°. *Далее аналогично первому доказательству*.)

6. В ряд выписаны *N* чисел. Каждое число, кроме крайних, равно сумме двух соседних с ним чисел. Известно, что сумма первых ста чисел равна 3, а сумма первых двухсот равна 9. При каком наибольшем *N*, не превосходящим 2018, сумма этих чисел будет отрицательной? **(<u>2015</u>. Пусть первые три числа равны *a, b, c*, где *b* = *a*+*c* ⇔ *c* = *b*–*a*. Далее находим, что четвёртое число равно (–*a*), пятое — (–*b*), шестое — (*a*–*b*), седьмое — *a*, восьмое — *b*. Тогда наша последовательность периодична с периодом 6, причём сумма чисел в периоде равна *a* + *b* + (*b*–*a*) + (–*a*) + (–*b*) + (*a*–*b*) = 0. Сумма первых 100=16·6+4 чисел равна сумме первых четырёх чисел периода, т.е. 3 = 2*b*–*a*, а сумма первых 200=33·6+2 чисел равна сумме первых двух чисел периода, т.е. 9 = *a*+*b*. Решая полученную систему уравнений, находим, что *a*=5*, b*=4. Сумма первых 2016 (2016 делится на 6) чисел равна 0, первых 2017 чисел равна *a*=5, 2018 чисел равны *a*+*b*=9, а сумма первых 2015 чисел как раз будет отрицательной *b*–*a*=–1.)**

7. На стороне *AC* равнобедренного треугольника *ABC* (*AB* = *AC*) отмечена точка *D*, такая, что *BD* = *BC*. На стороне *AB* отмечена точка *E*, такая, что *EB* = *ED*, а на продолжении отрезка *DE* за точку *E* — точка *F*, такая, что *FD* = *BC*. Точка *G* — основание перпендикуляра, опущенного из точки *F* на сторону *AB*. Оказалось, что *GB* = *GF*. Найдите угол *BAC*. **(<u>40°</u>. Пусть ∠*ABC*=∠*ACB*=∠*BDC*=*β*, ∠*EDB*=∠*EBD*=∠*DFG*=α (из равнобедренности треугольников *ABC, BCD, DEB, DFB, FGB*). Тогда из треугольника *DFB* (с учётом равнобедренного прямоугольного треугольника *FGB*) получаем, что 3*α*+2·45°=180°, откуда *α*=30°. Из треугольника *BCD* находим, что 2*β*+(*β*–*α*)=180°, откуда 3*β*=180°+*α*=210° и *β*=70°. Тогда из треугольника *ABC* находим ∠*BAC*=180°–2*β*=180°–2·70°=40°.)**



8. В клетках доски 8×8 по одному расставлены все натуральные числа от 1 до 64. Оказалось, что в каждом столбце (сверху вниз) и в каждой строке (слева направо) числа идут в порядке возрастания. Какие значения может принимать сумма чисел пятого (слева) столбца? **(<u>Любое целое число от 180 до 376</u>. Обозначим числа пятого столбца сверху вниз с**

учётом их возрастания $a_1<a_2<\ldots<a_8$. Тогда $a_1\geq5$, т.к. больше 4 чисел слева от себя, $a_2\geq10$, т.к. больше 9 чисел слева и выше от себя, …, $a_8\geq40$, т.к. больше 39 чисел слева и выше от себя. Значит, сумма чисел пятого столбца будет не меньше 5+10+15+…+40 = 5·(1+2+3+…+8) = 180. Аналогично рассуждая про числа справа и снизу, получим, что $a_8\leq64–3=61$, $a_7\leq64–7=57$, …, $a_1\leq64–31=33$, а вся сумма будет не больше 61+57+53+…+33=4·94=376. При этом из суммы 180 (см. табл. 1), постепенно увеличивая на 1 числа пятого столбца, начиная с самых нижних, мы сможем построить пример для любой целой суммы от 180 до 376 (см. табл.2).)

1	2	3	4	**5**	41	42	43
6	7	8	9	**10**	44	45	46
11	12	13	14	**15**	47	48	49
16	17	18	19	**20**	50	51	52
21	22	23	24	**25**	53	54	55
26	27	28	29	**30**	56	57	58
31	32	33	34	**35**	59	60	61
36	37	38	39	**40**	62	63	64

таб.1

1	2	3	4	**33**	34	35	36
5	6	7	8	**37**	38	39	40
9	10	11	12	**41**	42	43	44
13	14	15	16	**45**	46	47	48
17	18	19	20	**49**	50	51	52
21	22	23	24	**53**	54	55	56
25	26	27	28	**57**	58	59	60
29	30	31	32	**61**	62	63	64

таб.2

9. При каких действительных $a>1$ уравнение $\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{2}{a^2+1}+\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a-1}+x$ имеет целочисленный корень? **(Перенесём дробь из правой части налево и получим:**

$$x=\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{2}{a^2+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}=\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{2}{a^2+1}+\frac{(a-1)-(a+1)}{(a+1)(a-1)}=$$

$$\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{a^2-1}=\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{2(a^2-1)-2(a^2+1)}{(a^2+1)(a^2-1)}=\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}-\frac{4}{a^4-1}=$$

$$\frac{8}{a^8+1}+\frac{4(a^4-1)-4(a^4+1)}{(a^4+1)(a^4-1)}=\frac{8}{a^8+1}-\frac{8}{a^8-1}=\frac{8(a^8-1)-8(a^8+1)}{(a^8+1)(a^8-1)}=-\frac{16}{a^{16}-1}<0,$$ **причём целое значение $x=z<0$ будет <u>при $a=\sqrt[16]{-\frac{16}{z}+1}$, где z – любое отрицательное целое число</u>.)**

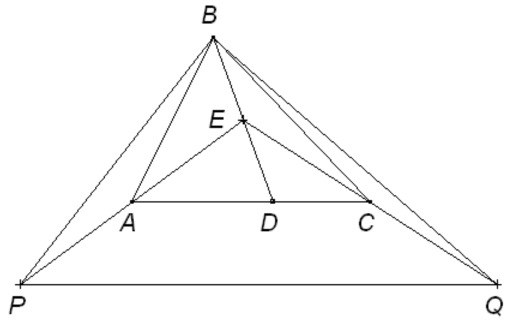
10. Сколькими способами число 2018 можно представить в виде суммы не менее чем трёх натуральных слагаемых? *(Порядок слагаемых важен, т.е., например, 2000+10+8 отличается от 10+8+2010.)* **(<u>2^{2017}–2018</u>. Рассмотрим ряд из 2018 единичек, между которыми надо поставить хотя бы 2 плюса, чтобы получилось три натуральных слагаемых с суммой 2018, каждое из которых равно соответствующему количеству единичек в получившемся разбиении единичек на группы. Значит, нам надо найти количество способов расстановки в 2017 промежутках хотя бы 2 плюсов. Всего существует 2^{2017} способов расстановки плюсов, т.к. для каждого промежутка есть 2 варианта расстановки плюса (поставить или не поставить). При этом у нас в 1 способе не поставлено ни одного плюса, а ещё в 2017 способах поставлен только 1 плюс (всего 2 слагаемых, нам же надо не менее трёх слагаемых), значит, количество нужных нам способов равно 2^{2017}–2018.)**

11. В некотором клубе состоит 100 джентльменов, у каждого из которых не более трёх знакомых в этом клубе. Среди любых четырёх джентльменов какие–то двое незнакомы. Какое наименьшее количество джентльменов можно исключить из клуба таким образом, чтобы гарантированно из любых троих оставшихся в клубе джентльменов какие–то двое не были знакомы? **(<u>33 джентльмена</u>. Начнём выделять непересекающиеся тройки попарно знакомых между собой джентльменов. Таких троек можно выделить $n\leq33$. Оставшееся множество джентльменов будет хорошим, т.е. в любой тройке найдутся двое незнакомых. Заметим теперь, что у каждого джентльмена в каждой выделенной тройке осталось не более одного знакомого среди остальных, не входящих в эту тройку, при этом не может оказаться так, что у всех троих есть общий знакомый**

среди остальных – противоречие с условием на четвёрку. Тогда возможны два случая: 1) у всех троих разные третьи знакомые, тогда исключим из клуба любого из них; 2) у двух из них есть общий знакомый, тогда исключим из клуба одного из них. Таким образом, мы исключили не более 33 джентльменов, а для остальных гарантированно выполняется требуемое условие. Но могло оказаться ровно 33 такие тройки, значит, нам пришлось бы исключать 33 джентльменов.)

12. Сколько решений имеет ребус (*в левой части 4 буквы-множителя – 4 разные цифры):* О·Р·Л·Ё=НОК(20,18)? **(<u>48=2·4! решений</u>. НОК(20,18)=НОК(2^2·5,2·3^2)=2^2·3^2·5, значит, все 4 цифры – ненулевые, одна из них равна 5. Если есть цифра 9=3^2, то две другие – это 1 и 4=2^2; если нет цифры 9, то кратными 3 будут цифры 3 и 6=2·3, а оставшаяся цифра – 2. Значит, всего 2 варианта цифр (5, 9, 1, 4) и (5, 3, 6, 2), каждый из которых даёт по P_4=4! решений ребуса за счёт перестановки по разным буквам.)**

13. На стороне *AC* треугольника *ABC* отметили точку *D*. Точка *E* – середина отрезка *BD*, точки *P* и *Q* симметричны точке *E* относительно вершин *A* и *C* соответственно. Найдите площадь треугольника *BPQ*, если площадь треугольника *ABC* равна 7. **(<u>21</u>. $S_{\Delta PBA}=S_{\Delta ABE}=S_{\Delta AED}$, $S_{\Delta QBC}=S_{\Delta CBE}=S_{\Delta CED}$, т.к. *A, C* и *E* – середины отрезков *PE, QE* и *BD* соответственно. Тогда $S_{\Delta AEC}=S_{\Delta ABC}/2=7/2$, $S_{\Delta PBE}+S_{\Delta QBE}=2\cdot(S_{\Delta ABE}+S_{\Delta CBE})=2\cdot S_{\Delta ABC}/2=7$, $S_{\Delta PEQ}=2^2\cdot S_{\Delta AEC}=2^2\cdot 7/2=14$, $S_{\Delta PBQ}=S_{\Delta PBE}+S_{\Delta QBE}+S_{\Delta PEQ}=7+14=21$.)**



14. Вова хочет покрасить каждое натуральное число в какой-нибудь цвет таким образом, чтобы любые два числа, разность которых — простое число, были покрашены в разные цвета. Каким наименьшим количеством цветов может обойтись Вова? **(<u>4 цвета</u>. Раскрасим в свой цвет числа с одинаковым остатком при делении на 4, тогда разность любых двух чисел одного цвета будет кратна 4, значит, не будет простым числом. Следовательно, любые два числа, разность которых – простое число, будут покрашены в разные цвета. Среди чисел 1, 3, 6 и 8 не должно быть чисел одного цвета, т.к. разность любых двух из них – простое число, значит, нам надо хотя бы 4 цвета.)**

15. В каждой клетке таблицы 3×3 лежит по камешку. Известно, что каждый камешек весит в *k* раз меньше, чем все вместе взятые камешки, лежащие в соседних с ним по стороне клетках. Во сколько раз суммарный вес всех камней больше веса центрального камня? **(**$\underline{3+2\sqrt{2}}$**. Пусть *A, B* и *C* – это соответственно суммарная масса 4-х угловых камней, 4-х камней в серединах сторон на краю и центрального камня. Тогда из условия следует, что *kA*=2*B* (каждый серединный камень учитывается дважды), *kB*=2*A*+4*C* (каждый угловой камень учитывается дважды, центральный – четырежды), *kC*=*B*. Решая систему, находим, что $k=2\sqrt{2}$. При этом суммарный вес равен** $S=A+B+C=\dfrac{2B}{k}+B+\dfrac{B}{k}=B(\dfrac{3}{k}+1)=kC(\dfrac{3}{k}+1)=C(3+k)$, **значит,** $\dfrac{S}{C}=3+k=3+2\sqrt{2}$ **.)**

16. Дан равнобедренный треугольник *MNK* (*MN* = *NK*). На стороне *NK* отметили точки *P* и *Q* так, что 2∠*NMP* = ∠*PMQ*, а 2∠*PMQ* = ∠*QMK*. Найдите величину угла *PQM*, если известно, что *PQ*=*MQ*. **(<u>132°</u>. Пусть ∠*NMP*=α, тогда ∠*PMQ*=2∠*NMP*=2α, ∠*QMK*=2∠*PMQ*=4α, причём на стороне *NK* точка *P* лежит между *N* и *Q*, иначе не выполняются условия на углы. В силу равнобедренности треугольника *PMQ* (*PQ*=*MQ*) получаем, что ∠*MPQ*=∠*PMQ*=2α, при этом как внешний угол треугольника *NMP* этот угол также равен сумме углов *NMP* и *MNP*, значит, ∠*MNP*=∠*MPQ*–∠*NMP*=2α–α=α. В силу равнобедренности треугольника *MNK* ∠*NKM* = ∠*NMK* = ∠*NMP*+∠*PMQ*+∠*QMK* = α+2α+4α = 7α, значит, сумма углов треугольника *MNK* равна 7α+7α+α=180°, откуда α=12°. Тогда ∠*PQM*=180°–∠*PMQ*–∠*MPQ*=180°–4α=180°–4·12°=132°.)**