XIV Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». XI Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти».

Старшая лига. **Решения**. ***11 сентября 2018 года***

1. В однокруговом турнире участвовали n шахматистов с различными рейтингами. Шахматист с самым низким рейтингом выиграл у шахматиста с самым большим рейтингом, а во всех остальных партиях всегда побеждал шахматист с более высоким рейтингом, Сколькими способами можно составить список шахматистов так, чтобы каждый (кроме последнего) выиграл у следующего по списку? (**$2^{n-2}+1$. Один из искомых списков — тот, где все шахматисты упорядочены по убыванию рейтинга. Во всех остальных списках шахматист с самым большим рейтингом идёт сразу после шахматиста с самым маленьким рейтингом, и всё полностью определяется тем, какие спортсмены стоят в ряду до этой пары, а какие – после. Наборов шахматистов, стоящих до этой пары, столько же, сколько подмножеств во множестве из n–2 элементов, то есть 2^{n-2}. Отсюда и получаем ответ.)**

2. Каждому натуральному числу n сопоставлено неотрицательное целое число n' по следующим правилам: (1) если p простое, то p' = 1, (2) $(ab)' = a'b+ab'$ для любых натуральных a и b. Найдите $(2018^{2018})'$. *Ответ дать в максимально упрощённом виде.* (**$2018^{2018}\cdot 1011$. Нетрудно доказать по индукции, что для любого $n\geq 2$ число n' равно самому числу n, умноженному на сумму обратных величин ко всем простым множителям из разложения на простые множители с учётом их повторов, т.е.**

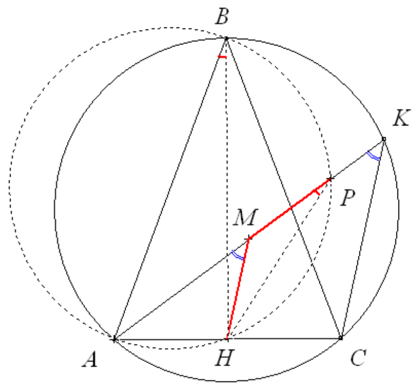
$$(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k})' = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\cdot\left(\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2}+\ldots+\frac{\alpha_k}{p_k}\right)$$

при различных простых p_i. Тогда

$$(2018^{2018})' = (2^{2018}\cdot 1009^{2018})' = 2018^{2018}\cdot\left(\frac{2018}{2}+\frac{2018}{1009}\right) = 2018^{2018}\cdot 1011.)$$

3. Даны 1000 действительных чисел, максимальный из модулей которых равен 1. Какое минимальное значение может принимать максимальный из модулей сумм тринадцати из этих чисел? (**13/25. Упорядочим числа $-1\leq x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_{1000}=1$, если считать, что у нас есть число 1. В случае, если 1 нет, тогда у нас есть (–1) и заменим все числа на противоположные, что при работе с модулями даст нам аналогичную ситуацию. Тогда максимальными по модулю суммами будет либо самая маленькая $x_1+x_2+\ldots+x_{13}$, либо самая большая $x_{988}+x_{989}+\ldots+x_{1000}$. Предположим, что они обе по модулю меньше 13/25, тогда в силу равенства $x_{1000}=1$ сумма $x_{988}+x_{989}+\ldots+x_{999}<-12/25$, значит, по принципу Дирихле $x_{988}<-1/25$, тогда $x_1+x_2+\ldots+x_{13}\leq 13x_{988}<-13/25$, т.е. модуль этой суммы больше 13/25 – противоречие. Значит, минимальное значение максимального из модулей сумм не меньше 13/25. В качестве примера на 13/25 подойдёт пример: 1, остальные числа равны (–1/25), тогда любая сумма (из 13 слагаемых) с 1 равна 13/25, а любая сумма из 13 отрицательных слагаемых равна (–13/25), т.е. у всех сумм один и тот же модуль 13/25.)**

4. «На дуге *BC* описанной около равнобедренного треугольника *ABC* (*AB*=*BC*) окружности взята точка *K*. Отрезок *AK* пересекает окружность, построенную на стороне *AB* как на диаметре, в точке *P*. Точка *M* – середина *AK*. Докажите, что *MP* ....» Что надо доказать? (**$MP=KC/2$. Пусть H – середина основания AC, тогда $\angle ABH=\angle ABC/2=\beta$. Кроме того, $\angle AHB=90°$, значит, H вместе с точкой P лежит на окружности с диаметром AB, причём P лежит на дуге BH в силу положения точки K на дуге BC описанной окружности ΔABC. Тогда $\angle APH=\angle ABH=\beta$, как опирающиеся на одну дугу. Также равны $\angle AKC$ и $\angle ABC=2\beta$ как опирающиеся на одну дугу на описанной окружности. MH является средней линией ΔAKC, значит, $MH\parallel KC$ и $MH=KC/2$, тогда $\angle AMH=\angle AKC=2\beta$. При этом $\angle AMH$ является внешним углом ΔMHP, значит, $2\beta=\angle AMH=\angle MPH+\angle MHP=\beta+\angle MHP$, откуда $\angle MHP=\beta$, т.е. треугольник MHP – равнобедренный и $MP=MH=KC/2$, что и требовалось доказать.)**



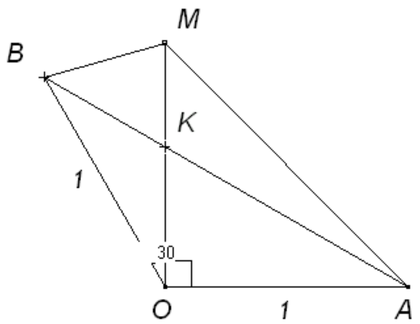
5. Для каких натуральных чисел n найдутся простые числа p, q такие, что выполняется равенство: $n^2=p^2+pq+q^2$? (**$n=7$. В силу симметрии относительно p и q можно считать, что $p\leq q$. Преобразуем наше выражение к равносильному: $pq=(p+q)^2-n^2=(p+q-n)(p+q+n)$, где оба множителя окажутся положительными (второй положителен, значит, и первый тоже) целыми числами (т.е. натуральными), причём $p+q-n < p+q+n$, кроме того $p+q+n > q$. Тогда произведение этих двух натуральных множителей может равняться произведению двух простых чисел p и q только в единственном случае:**

$$\begin{cases} p+q-n=1,\\ p+q+n=pq.\end{cases}$$

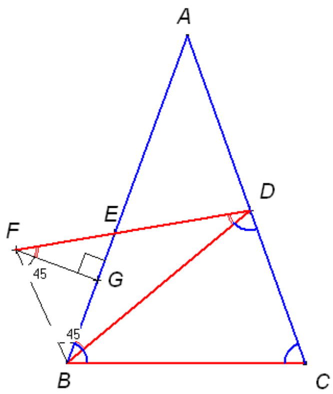
Из первого уравнения этой системы находим $n=p+q-1$ и подставляем во второе уравнение, которое после переноса всех чисел в одну часть даёт уравнение $pq-2p-2q+1=0$. Применяя

классическое разложение на множители, получим равносильное уравнение: $(p–2)(q–2)=3$, откуда с учётом $2\le p\le q$ получим единственный вариант $\begin{cases} p-2=1, \\ q-2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3, \\ q=5 \end{cases} \Rightarrow n^2=3^2+3\cdot 5+5^2=49 \Rightarrow n=7$. ***Комментарий*: Диофантово уравнение вида $axy+bx+cy+d=0$ (a, b, c, d – целые коэффициенты, x и y – целые переменные) с помощью стандартного трюка с умножением на a и разложением на два целочисленных множителя превращается в равносильное уравнение $(ax+c)(ay+b)=bc–ad$, которое уже решаем, рассматривая все возможные варианты произведения двух целых чисел $(ax+c)$ и $(ay+b)$, дающих в произведении целое число $bc–ad$.)**

6. Решите уравнение $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}=\sqrt{3}$. (<u>$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$</u>. **Обозначим** $f(x)=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$**, тогда при $x\le 0$ имеем $f(x)\ge f(0)=2>\sqrt{3}$, значит, решение уравнения есть только при положительных значениях переменной. Отложим отрезки OA, OB и OM так, что $OA=OB=1$, $OM=x$, $\angle AOB=120°$, $\angle AOM=90°$ и $\angle MOB=30°$ (см. рис.). Тогда** $MA=\sqrt{1+x^2}$, $MB=\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ **и** $MA+MB=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}\ge AB=\sqrt{3}$ **по неравенству треугольника. Отсюда** $x=OM=OK=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ***<u>Комментарий:</u> Геометрическая интерпретация алгебраического выражения:*☺.)**



7. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка D, такая, что $BD = BC$. На стороне AB отмечена точка E, такая, что $EB = ED$, а на продолжении отрезка DE за точку E — точка F, такая, что $FD = BC$. Точка G — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону AB. Оказалось, что $GB = GF$. Найдите угол BAC. (**<u>40°</u>. Пусть $\angle ABC=\angle ACB=\angle BDC=\beta$, $\angle EDB=\angle EBD=\angle DFG=\alpha$ (из равнобедренности треугольников ABC, BCD, DEB, DFB, FGB). Тогда из треугольника DFB (с учётом равнобедренного прямоугольного треугольника FGB) получаем, что $3\alpha+2\cdot 45°=180°$, откуда $\alpha=30°$. Из треугольника BCD находим, что $2\beta+(\beta–\alpha)=180°$, откуда $3\beta=180°+\alpha=210°$ и $\beta=70°$. Тогда из треугольника ABC находим $\angle BAC=180°–2\beta=180°–2\cdot 70°=40°$.)**



8. Таблица 3×3 заполнена девятью различными цифрами таким образом, что все шесть трехзначных чисел, которые можно прочитать в строках этой таблицы слева направо и в столбцах сверху вниз, делятся на 6. Сколько из этих шести чисел могут делиться на 5? Сколько существует вариантов таких таблиц? (**<u>1 число, 32 таблицы</u>. Все 6 трёхзначных чисел должны быть чётными, т.е. 5 цифр, стоящих в нижнем и правом рядах таблицы должны быть чётными. Тогда в таблице обязательно есть 0 на одном из этих мест и, как следствие хотя бы одно число, кратное 5, обязательно будет. Каждое из трёх горизонтальных чисел кратно 3, значит, у каждого из них сумма цифр делится на 3 и, как следствие, вся сумма цифр должна делиться на 3. Тогда из всего набора цифр, сумма которого равна 45, не используется цифра, кратная 3, т.е. нами использовано по 3 цифры с остатком 0, 1 и 2. Суммы цифр нижнего и правого чисел кратны 3, а это все**

3	0	1	2
2	1	2	0
1	2	0	1
	a	*b*	*c*

3	1	0	2
2	2	1	0
1	0	2	1
	a	*b*	*c*

5 чётных цифр, одна из которых повторяется дважды, значит, $0+2+4+6+8+p=20+p\equiv 2+p\equiv 0 \pmod 3$, где p – повторяющаяся цифра в клетке $c3$ (см. рис.). Тогда это может быть только чётная цифра с остатком 1 при делении на 3, т.е. 4. Как следствие, мы получим ровно 1 число, кратное 5, причём 0 будет стоять в одной из соседних с 4 клетках, тогда первая цифра k трёхзначного числа $\overline{k04}$ будет иметь остаток 2 (равна 2 или 8). Перебор вариантов остальных чётных цифр по остаткам по модулю 3 с точностью до симметрии относительно главной диагонали даёт 2 варианта расстановки остатков (на рисунке приведены случаи, когда 0 в клетке $c2$). Тогда всего таких таблиц 2 (варианты расположения цифры 0) × 2 (варианты расстановки остатков) × 2 (цифры 2 и 8 – на месте цифр с остат-

ком 2 в нижнем и правом числах) ×2 (цифры 1 и 7 с остатком 1 в левом верхнем угловом квадрате 2×2) × 2 (цифра 3 или 9 на месте цифры с остатком 0 в этом же квадрате), т.е. всего 2^5=32 таблицы. Остальные 2 цифры (*b*1 и *b*2, *a*1 и *a*2 на рис.) ставятся однозначно – 6 и 5 соответственно.)

9. При каких действительных $a>1$ уравнение $\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{2}{a^2+1}+\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a-1}+x$ имеет целочисленный корень? **(Перенесём дробь из правой части налево и получим:** $x=\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{2}{a^2+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}=\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{2}{a^2+1}+\frac{(a-1)-(a+1)}{(a+1)(a-1)}=$
$\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{a^2-1}=\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{2(a^2-1)-2(a^2+1)}{(a^2+1)(a^2-1)}=\frac{8}{a^8+1}+\frac{4}{a^4+1}-\frac{4}{a^4-1}=$
$\frac{8}{a^8+1}+\frac{4(a^4-1)-4(a^4+1)}{(a^4+1)(a^4-1)}=\frac{8}{a^8+1}-\frac{8}{a^8-1}=\frac{8(a^8-1)-8(a^8+1)}{(a^8+1)(a^8-1)}=-\frac{16}{a^{16}-1}<0$, **причём целое значение $x=z<0$ будет <u>при $a=\sqrt[16]{-\frac{16}{z}+1}$, где z – любое отрицательное целое число</u>.)**

10. В стране 36 городов. Каждые два из них соединены (двусторонним) рейсом одной из пяти авиакомпаний. Упорядоченную тройку городов A, B, C назовём *правильной*, если между A и B и между B и C летает одна и та же авиакомпания. Какое наименьшее количество правильных троек городов может быть в этой стране? **(<u>7560 троек</u>. <u>*Пример*</u>: Проведём между 36 городами–вершинами графа однокруговой турнир на 35 туров. Рёбра первых 7 туров красим в 1 цвет, следующих 7 туров – во второй цвет, …, последних 7 туров – в пятый цвет. Тогда около каждой вершины будет по 7 рёбер каждого цвета и каждая вершина будет средней в $2\cdot5\cdot C_7^2=10\cdot\frac{7\cdot6}{2}=210$ тройках, а всего троек будет 36·210=7560. <u>*Доказательство оценки*</u>: Тройки определяются своей средней вершиной, из которой выходят к двум другим вершинам рёбра одного цвета. Рассмотрим произвольную вершину. Пусть из неё выходят n_1, n_2, …, n_5 рёбер соответствующих цветов, тогда количество троек равно $2\cdot(C_{n_1}^2+C_{n_2}^2+C_{n_3}^2+C_{n_4}^2+C_{n_5}^2)$, т.к. каждая тройка нами считается дважды (туда и обратно), а для подсчёта троек надо знать, сколько пар каждого цвета будут образовывать вершины, соединённые с нашей вершиной рёбрами одного цвета. Тогда по формуле числа сочетаний наша сумма равна**

$$2\cdot\left(\frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{n_2(n_2-1)}{2}+\ldots+\frac{n_5(n_5-1)}{2}\right)=({n_1}^2+{n_2}^2+\ldots+{n_5}^2)-(n_1+n_2+\ldots+n_5)=$$

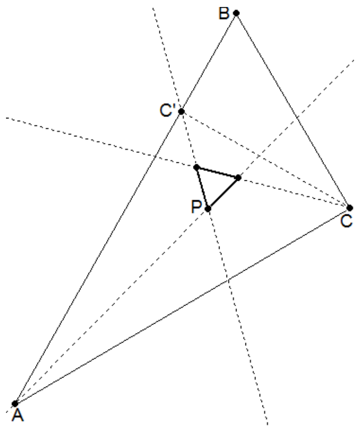
$$=({n_1}^2+{n_2}^2+\ldots+{n_5}^2)-35\geq5\cdot\left(\frac{n_1+n_2+\ldots+n_5}{5}\right)^2-35=\frac{35^2}{5}-35=210,$$ **где при оценивании мы воспользовались неравенством между средним квадратическим и средним арифметическим $\sqrt{\frac{{n_1}^2+{n_2}^2+\ldots+{n_5}^2}{5}}\geq\frac{n_1+n_2+\ldots+n_5}{5}$. Значит, всего не менее 36·210=7560 троек.)**

11. Найдите все многочлены *P(x)* с действительными коэффициентами, обладающие следующим свойством: если a^2-b^2 рационально, то число *P(a)–P(b)* тоже рационально. **(Положим *a* = –*b*. Получим, что значение многочлена *F*(*b*) = *P*(–*b*)–*P*(*b*) рационально при любом *b*. Так как непостоянный многочлен принимает и иррациональные значения, получаем, что *F*(*b*) = const = *F*(0) = 0. Таким образом, *P*(*b*) = *P*(–*b*), следовательно, для некоторого многочлена *Q*(*x*) имеем *P*(*x*) = *Q*(x^2). Полагая *a* = $\sqrt{b^2+1}$, получаем, что *Q*(b^2+1)–*Q*(b^2) рационально при любом *b*. Отсюда аналогично предыдущему заключаем, что *Q*(*x*+1)–*Q*(*x*) = const, что возможно только если *Q*(*x*) имеет степень 1. Итак, <u>*P*(*x*) = *ax*^{2}+*b*. Нетрудно убедиться, что *b* может быть любым действительным числом, а *a* – обязательно рациональным</u>.)**

12. Сколько решений имеет ребус (*в левой части 4 буквы-множителя – 4 разные цифры):* О·Р·Л·Ё=НОК(20,18)? **(<u>48=2·4! решений</u>. НОК(20,18)=НОК(2^2·5,2·3^2)=2^2·3^2·5, значит, все 4 цифры – ненулевые, одна из них равна 5. Если есть цифра 9=3^2, то две другие – это 1 и 4=2^2; если нет цифры 9, то кратными 3 будут цифры 3 и 6=2·3, а оставшаяся цифра – 2. Значит, всего 2 варианта цифр (5,**

9, 1, 4) и (5, 3, 6, 2), каждый из которых даёт по P_4=4! решений ребуса за счёт перестановки по разным буквам.)

13. В остроугольном треугольнике *ABC* $\angle B=60°$. Пусть *C'* – основание высоты, проведенной из вершины *C*. Биссектрисы углов *BAC, ACB* и *AC'C* внутри треугольника образуют правильный треугольник. Найдите углы треугольника *ABC*. **($\angle A$=30°, $\angle C$=90°: ☺. *__Правильный ответ:__* условие задачи некорректно. *__Решение:__* Пусть *P* - точка пересечения биссектрис $\angle A$ и $\angle AC'C$. Тогда $\angle APC'$=180°–60°= 120°. С другой стороны, $\angle APC'$=180°–($\angle C'AC+\angle AC'C$)/2. Таким образом, $\angle C'AC+\angle AC'C$=120°. $\angle AC'C$=90°, т.е. $\angle C'AC$=30°. Отсюда $\angle C$=180°-60°-30°=90°, но …, к огромному сожалению, в условии сказано, что треугольник *ABC* – остроугольный, значит, остроугольный треугольник с требуемым свойством не существует.)**

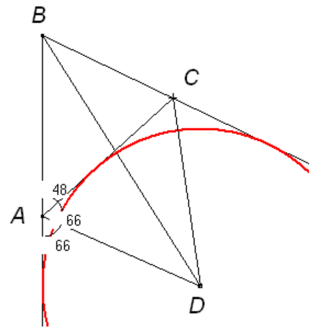


14. *p, q, r* – различные простые числа, а *n, m* – целые числа, удовлетворяющие условиям $p+q = r^n$, $p–q = r^m$. Какие значения может принимать сумма всех пяти переменных? **(__11 и 14__. Заметим, что $p>q$, т.к. $p–q=r^m \geq r^0=1$. Кроме того, $p+q>p–q$, тогда $1<\dfrac{p+q}{p-q}=\dfrac{r^n}{r^m}=r^{n-m} \Rightarrow 1+\dfrac{2q}{p-q}=r^{n-m}$ – целое число, значит, ($p–q$) – натуральный делитель числа $2q$, т.е. принадлежит множеству {1, 2, *q*, 2*q*}. Принимать значения *q* и 2*q* эта разность не может, т.к. иначе *p* равно 2*q* или 3*q* и будет составным числом. Если $p–q=1=r^0$, тогда m=0, p=3, q=2, $p+q=5=r^n$, значит, r=5, n=1. Если $p–q=2=r^m$, значит, r=2, m=1. Если q=3, то $p=q+2=5$, $p+q=5+3=8=2^n$, значит, n=3. Если $q\neq3$, то *q* не делится на 3. Тогда при $q\equiv1$ (mod 3) получим $p=q+2$ делится на 3 (и больше 3), т.е. *p* – составное. А при $q\equiv2$(mod 3) получим $p=q+2\equiv1$(mod 3), значит, $p+q\equiv1+2\equiv0$(mod 3) , т.е. $p+q$ делится на 3, значит, не может равняться 2^n. Получаем 2 пятёрки чисел: 1). p=3, q=2, r=5, n=1, m=0; 2). p=5, q=3, r=2, n=3, m=1. Соответственно суммы пятёрок равны 11 и 14.)**

15. В каждой клетке таблицы 3×3 лежит по камешку. Известно, что каждый камешек весит в *k* раз меньше, чем все вместе взятые камешки, лежащие в соседних с ним по стороне клетках. Во сколько раз суммарный вес всех камней больше веса центрального камня? **($\underline{3+2\sqrt{2}}$. Пусть *A, B* и *C* – это соответственно суммарная масса 4-х угловых камней, 4-х камней в серединах сторон на краю и центрального камня. Тогда из условия следует, что $kA=2B$ (каждый серединный камень учитывается дважды), $kB=2A+4C$ (каждый угловой камень учитывается дважды, центральный – четырежды), $kC=B$. Решая систему, находим, что $k=2\sqrt{2}$. При этом суммарный вес равен**

$$S=A+B+C=\frac{2B}{k}+B+\frac{B}{k}=B(\frac{3}{k}+1)=kC(\frac{3}{k}+1)=C(3+k),$$

значит, $\dfrac{S}{C}=3+k=3+2\sqrt{2}$.)



16. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* известно, что $\angle BAC$=48°, $\angle DAC$=66° и $\angle CBD=\angle DBA$. Найдите $\angle BDC$. **(__24°__. *__Решение 1__*: Внешний угол *A* равен 180°–48°–66°=66°, значит, точка *D* – точка пересечения биссектрисы внутреннего угла *B* и внешнего угла *A* треугольника *ABC*, значит, *D* – центр вневписанной окружности и лежит на биссектрисе внешнего угла *C*. Пусть $\angle B=2\beta$, тогда внешний угол *C* равен 48°+2β, $\angle BDC$=(48°+2β)/2–$\angle DBC$=(24°+β)–β=24°. *__Решение 2 (методом «идеального» построения):__* Рассмотрим дельтоид *ABA'D*, в котором *BD* – ось симметрии и *C* принадлежит лучу *BA'*. Тогда биссектриса *AI* пересекает биссектрису *BD* в точке *I*, которая окажется точкой пересечения биссектрис треугольника *ABC*, а $\angle IAD=\angle BAC/2+\angle CAD$=24°+66°=90°. Рассмотрим окружность, построенную на отрезке *ID* как на диаметре. В силу симметрии относительно *BD* точек *C* и *C'* и того, что прямая *AB* пересекает эту окружность в такой точке *P*, что *P* и *P'* симметричны в силу равенства дуг *PI* и *IP'* получаем, что точка *P'* должна оказаться точкой пересечения *BA'*, окружности и луча *AC*, т.е. точкой *C*. Значит, точка *C* лежит на этой окружности и $\angle BDC=\angle IDC=\angle IAC=\angle BAC/2$=24°. *__Комментарий:__ Геометрия – это геометрия треугольника и окружности, поэтому всегда важно видеть окружность даже тогда, когда её нет в условии!*)**