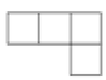
Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 19–26.09.2018

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 19.09.2018. СТАРТ-ЛИГА

1. На полке в ряд помещается 9 одинаковых толстых учебников, а 10 — уже не помещается. Также на этой полке помещается 15 одинаковых тонких учебников, а 16 — уже не помещается. Вася поставил на полку 5 тонких учебников. Какое наибольшее количество толстых учебников он сможет ещё разместить на полке?

2. На доске записано число 123456789123456789..., всего 2018 цифр. Аня и Боря играют в игру, делая ходы по очереди. Начинает Аня. За один ход игрок может стереть две цифры — либо две начальные цифры текущего числа, либо две последние, либо первую и последнюю цифры. Ходы делаются, пока на доске не останется двузначное число. Боря выигрывает, если это двузначное число делится на 3, а иначе выигрывает Аня. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Докажите, что любой клетчатый квадрат с нечётной стороной и вырезанной центральной клеткой можно разрезать на Г-тетрамино (см. рисунок.)



4. Внутри треугольника ABC выбрана точка P такая, что $BC = AP$ и $\angle APC = 180^\circ - \angle ABC$. На стороне AB выбрана точка K такая, что $AK = KB + PC$. Докажите, что $CK \perp AB$.

5. Даша разместила в Инстаграме пять фотографий. Каждая фотография понравилась более чем половине её друзей (а друзей у Даши очень много). Докажите, что у Даши найдутся такие два друга, что каждая фотография понравилась хотя бы одному из них.

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Докажите, что $ab + ac + bc \geq 3$.

7. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде

$$\frac{a[b,c] + b[c,a] + c[a,b]}{[a,b,c]}$$

для некоторых натуральных a, b, c.
(Через $[x, y, \ldots]$ обозначен НОК чисел $x, y, \ldots$)