**Тринадцатый Южный математический турнир**
**ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018**

**Гранд-лига. Первый тур. 20.09.2018**

**1.** Существует ли функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что для любых $x, y \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство
$$f(x+y) \geq xf(y) + f(f(y))?$$
(Через $\mathbb{R}_+$ обозначено множество всех положительных действительных чисел.)

**2.** Гриша отметил на плоскости конечный набор точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и соединил некоторые пары отмеченных точек непересекающимися по внутренним точкам отрезками. Он показал эту картинку Максиму, а затем стёр её. Максим хочет восстановить Гришину картинку. Он может проделывать следующие две операции: $(i)$ отметить любую точку (не лежащую на прямой, проходящей через две отмеченных) и соединить её отрезками со всеми отмеченными точками, с которыми это можно сделать без появления пересечений; $(ii)$ удалить любую отмеченную точку и все выходящие из неё отрезки. Обязательно ли Максим может добиться цели?

**3.** Связный граф на 100 вершинах таков, что при удалении любых двух рёбер, не имеющих общих концов, он становится несвязным. Какое наибольшее количество рёбер может быть в этом графе? (Как обычно, в графе нет кратных рёбер и петель.)

**4.** По кругу расставлены в некотором порядке $2n+1$ точек: $n$ белых, $n$ красных и одна чёрная. Докажите, что можно соединить $2n$ из этих точек $n$ непересекающимися отрезками так, чтобы ни один из отрезков не соединял белую и красную точки.

**5.** Попрыгунья-стрекоза прыгает по натуральным числам. В первый день она может прыгнуть на любое натуральное число. Дальше, если в некоторый день она прыгнула на число $n$, то в следующий день она прыгает на число, не превосходящее $2n$. Может ли стрекоза бесконечно долго прыгать, не попав два раза на числа с одной и той же суммой цифр в двоичной записи?

**6.** На плоскости даны прямая $\ell$ и точки $A$ и $B$, лежащие по разные стороны от неё. На прямой $\ell$ всевозможными способами выбираются точки $P$ и $Q$ такие, что $\angle PAQ = 90^\circ$. Докажите, что описанные окружности всех получающихся треугольников $BPQ$ имеют общую точку, отличную от $B$.

**7.** Числа $2^{3^1}$, $2^{3^2}$, $\ldots$, $2^{3^{2018}}$ выписаны друг за другом в строчку без пробелов. Получилось натуральное число, в десятичной записи которого $k$ цифр. На какую наибольшую степень двойки это число делится?

**8.** Найдите все пары целых чисел $a$, $b$, удовлетворяющие равенству $a^4 + b = a^3 + b^2$,

**9.** Дано натуральное $n$. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ таковы, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$. Какие значения может принимать сумма
$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}?$$

**10.** Дан треугольник $ABC$, в котором $2AC = AB + BC$. Пусть $K$ — середина дуги $ABC$ описанной окружности треугольника, $I$ — центр вписанной окружности, а $T$ — точка на прямой $AC$ такая, что $\angle BIT = 90^\circ$. Докажите, что прямая $TB$ касается описанной окружности треугольника $BIK$.