Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2018
Премьер-лига. 1 тур. 20.09.18

1. Точка H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > AC$. Точка E симметрична C относительно высоты AH. F – точка пересечения прямых EH и AC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на прямой AB.

2. Существует ли функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что для любых $x, y \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство

$$f(x+y) \geqslant xf(y) + f(f(y))?$$

(Через $\mathbb{R}_+$ обозначено множество всех положительных действительных чисел.)

3. Связный граф на 100 вершинах обладает свойством: при удалении любых 2 рёбер, не имеющих общих концов, он становится несвязным. Какое наибольшее количество рёбер может быть в этом графе?

4. По кругу расставлены $2n+1$ точек: n белых, n красных и одна чёрная. Докажите, что можно соединить $2n$ из этих точек n непересекающимися отрезками так, чтобы ни один из отрезков не соединял белую и красную точки.

5. Попрыгунья-стрекоза прыгает по натуральным числам. В первый день она может прыгнуть на любое натуральное число. Дальше каждый день она прыгает на другое число, не превосходящее удвоенного предыдущего. Докажите, что стрекоза может бесконечно долго прыгать так, чтобы ни разу не попасть на число, у которого такая же сумма цифр, как у одного из предшествующих.

6. На плоскости даны точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой ℓ. На прямой ℓ всевозможными способами выбираются точки P и Q такие, что $\angle PAQ = 90^\circ$. Докажите, что все описанные окружности получающихся треугольников BPQ имеют общую точку, отличную от B.

7. Числа 1, 2, 2^2, 2^3, …, 2^{2018} выписаны друг за другом в строчку. На какую наибольшую степень двойки делится получившееся натуральное число 1248163264128…?

8. При каких m и n прямоугольник $m \times n$ можно разбить на равное количество квадратов 2×2 и 1×1?