Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Гранд-лига. Второй тур. 21.09.2018

1. Последовательности действительных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{2018}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_{2018}$ устроены так, что при каждом $n = 0, 1, \ldots, 2017$ выполнены либо равенства $a_{n+1} = a_n/2$ и $b_{n+1} = \frac{1}{2} - a_n$, либо равенства $a_{n+1} = 2a_n^2$ и $b_{n+1} = a_n$. Известно, что $a_{2018} \leqslant a_0$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $b_1 + b_2 + \cdots + b_{2018}$.

2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть K — середина стороны AB, а P, Q и R — основания перпендикуляров, опущенных из точки E на стороны DA, AB и BC соответственно. Докажите, что точки P, Q, R и K лежат на одной окружности.

3. Дано натуральное $n > 1$. Сколько существует подмножеств $S \subset \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$, для которых существует описанный $(2n+1)$-угольник, у которого последовательные длины сторон $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ удовлетворяют равенству

$$\sum_{j=1}^{2n+1} a_j = 2\sum_{i\in S} a_i?$$

4. Некоторые дети в «Орлёнке» дружат (дружба взаимна). Группу из 13 попарно дружащих детей назовём *компанией*. Компанию назовём *забавной*, если хотя бы один из её членов не дружит ни с кем вне компании. Известно, что каждый ребёнок содержится в компании, но при удалении любой дружбы это свойство нарушается. Докажите, что любая пара друзей содержится в забавной компании.

5. Из двадцати вершин правильного додекаэдра, сделанного из проволоки, по рёбрам поползли двадцать муравьёв. Каждый муравей может ползать по рёбрам как угодно с единственным ограничением — никогда не превышать скорости 1 ребро в минуту. Через время t после начала движения оказалось, что к этому моменту каждая пара муравьёв уже встречалась (то есть оказывалась в одной точке). Найдите наименьшее возможное значение t.

6. 3^n солдат выстроены в шеренгу. По команде «Перестрой-СЯ!» они рассчитываются на первый-второй-третий, после чего первые становятся в начало шеренги (в том же порядке по отношению друг к другу, в каком они стояли перед этим), после них становятся вторые (тоже сохраняя своё взаимное расположение), а потом третьи (тоже в первоначальном порядке). Например, солдаты, построенные в порядке 123456789, после такой команды становятся в порядке 147258369. Докажите, что после n команд «Перестрой-СЯ!» солдаты вернутся к исходному порядку.

7. Даны натуральное $n > 2$ и простое p. Оказалось, что $n^3 - 8$ делится на p, а $p - 4$ делится на n. Докажите, что число $p - 3$ является точным квадратом.

8. Касательная в точке A к окружности Ω, описанной около треугольника ABC, пересекает прямую BC в точке K. Продолжение медианы AA_1 пересекает Ω в точке L. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Прямая KM пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что LA — биссектриса угла PLQ.

9. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ определена условиями $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ и

$$a_{n+4} = \frac{(a_{n+3}+1)(a_{n+2}+1)(a_{n+1}+1)}{a_n} \qquad \text{при } n \geqslant 1.$$

Докажите, что знаменатели всех её членов в несократимой записи являются степенями двойки.

10. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^2+4}{b+c} + \frac{b^2+9}{c+a} + \frac{c^2+16}{a+b} \geqslant 9.$$