Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2018
Премьер-лига. 2 тур. 21.09.18

1. Сумма цифр натурального числа n равна сумме цифр числа n^2. Найдите все значения, которые она может принимать.

2. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке K. Продолжение медианы AM пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке T. На отрезке AM выбрана точка H так, что $\angle AHK = 90°$. Докажите, что $AT = 2HM$.

3. На столе лежит 2018 карточек, на которые написаны числа от 1 до 2018 по одному разу каждое. Вася и Петя играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) берут себе карточки со стола, пока у каждого не будет 1009 карточек. Тот из игроков, у которого сумма чисел на карточках будет чётна, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

4. Точка P лежит внутри остроугольного треугольника ABC. Точки D, E и F – основания перпендикуляров, опущенных из P на стороны ABC. На шести отрезках, на которые эти точки разбивают стороны треугольника, как на основаниях, построены квадраты вне треугольника ABC. Эти квадраты попеременно раскрашены в красный и зелёный цвета. Рассмотрим два треугольника, образованных прямыми, содержащими "внешние" стороны квадратов одного цвета. Докажите, что эти треугольники равны.

5. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+4}{b+c} + \frac{b^2+9}{c+a} + \frac{c^2+16}{a+b} \geqslant 9$$

для положительных a, b, c.

6. 3^n солдат выстроены в шеренгу. По команде "Перестрой-СЯ!" они рассчитываются на первый-второй-третий, после чего первые становятся в начало шеренги (в том же порядке по отношению друг к другу, в каком они стояли перед этим), после них становятся вторые (тоже сохраняя своё взаимное расположение), а потом третьи (тоже в первоначальном порядке). Например, солдаты, построенные в порядке 123456789, после такой команды становятся в порядке 147258369. Докажите, что после n команд "Перестрой-СЯ!" солдаты вернутся к исходному порядку.

7. Даны натуральное $n > 2$ и простое p. Докажите, что если $n^3 - 8$ делится на p и $p - 4$ делится на n, то $p - 3$ — точный квадрат.

8. Дано натуральное число $1 < n < 2018$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ определим многочлен $S_i(x) = x^2 - 2018x + \ell_i$, где $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ – различные натуральные числа. Известно, что многочлен $S_1(x) + S_2(x) + \cdots + S_n(x)$ имеет целый корень. Докажите, что найдётся такое i, что $\ell_i \geqslant 2018$.