Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 19–26.09.2018

БОЙ №2. 21.09.2018. СТАРТ-ЛИГА

1. Существует ли такой набор одинаковых треугольников, что, используя все треугольники из этого набора, можно сложить как некоторый ромб, так и некоторый равносторонний выпуклый шестиугольник?

2. Из восьми вершин куба по рёбрам поползли 8 муравьёв. Каждый муравей может ползать по рёбрам как угодно с единственным ограничением — никогда не превышать скорости 1 ребро в минуту. Через t минут после начала движения оказалось, что к этому моменту каждая пара муравьев уже встречалась (оказывалась в одной точке). Найдите наименьшее возможное значение t.

3. Существует ли такое натуральное число N, что и у числа N, и у числа N^2-1 сумма цифр равна 2018?

4. В лагерь приехало 999 детей. Лагерный психолог выдал каждому ребёнку значок с указанием, сколько друзей у этого ребёнка среди остальных 998 детей Затем психолог разбил детей на группы так, что в каждой группе у всех значки с одним и тем же числом, равным числу детей в этой группе (возможно, есть группы с одинаковым числом детей). Докажите, что психолог ошибся.

5. Дан квадрат $ABCD$ с центром O и такая точка K вне квадрата, что угол CKB тупой. На отрезках BK и CK построили квадраты $BKNP$ и $CKML$ так, что точки P и L оказались внутри квадрата $ABCD$. Докажите, что O — середина отрезка PL.

6. Докажите для положительных чисел a, b, c неравенство:

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{b}{a+c}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right)\geq 1.$$

7. 2^n солдат выстроены в шеренгу. По команде "Перестрой-СЯ!" они рассчитываются на первый-второй, после чего первые становятся в начало шеренги (в том же порядке по отношению друг к другу, в каком они стояли перед этим), а после них становятся вторые (тоже сохраняя своё взаимное расположение). Например, солдаты, построенные в порядке 12345678 после такой команды становятся в порядке 13572468. Докажите, что после n команд "Перестрой-СЯ!" солдаты вернутся к исходному порядку.

8. Верно ли, что найдётся бесконечно много пар натуральных чисел a и b, для которых НОД(a,b)+НОК(a,b) делится на $a+b$, и в частном получается 2018?